



周末练习册 · 数学

参考答案



敏试教育教研中心

参考答案与解析

目 录

第一周	2
第二周	5
第三周	8
第四周	12
第五周	15
第六周	18
第七周	21
第八周	24
第九周	28
第十周	31
第十一周	33
第十二周	36
第十三周	39
第十四周	42
第十五周	44
第十六周	48
第十七周	52
第十八周	55
第十九周	59
第二十周	62

第一周

一、选择题

1. B【解析】由集合 $P = \{(x, y) | x - y = 2, x \in R\}$, $Q = \{(x, y) | x + y = 2, x \in R\}$, $\therefore \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$, $\therefore P \cap Q = \{(2, 0)\}$.

2. D【解析】 $\because$ 圆锥母线与底面所成角为 60° , 则圆锥轴截面为等边三角形,

设等边三角形的边长为 a , 则轴截面面积 $S = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$,

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 2\sqrt{3}$, 解得 $a = 2\sqrt{2}$,

则圆锥底面圆半径 $r = \sqrt{2}$, 圆锥的高 $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \sqrt{6}$,

$\therefore$ 圆锥的体积 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \pi$.

3. A【解析】 $\because x + y = a + b$, $\therefore y = a + b - x$, $x = a + b - y$,

把 $y = a + b - x$ 代入 $y - x < a - b$ 得: $a + b - x - x < a - b$,

$\therefore 2b < 2x$, $\therefore b < x$ ①.

把 $x = a + b - y$ 代入 $y - x < a - b$ 得: $y - (a + b - y) < a - b$,

$\therefore 2y < 2a$, $\therefore y < a$ ②.

又 $\because b > a$ ③,

$\therefore$ 由①②③得: $y < a < b < x$.

4. D【解析】由题意可得, $a_1 = 0$, $a_2 = \sqrt{3}$, $a_3 = -\sqrt{3}$, $a_4 = 0$, $\dots$, 由此猜想数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列, 则 $a_n = a_{671 \div 3} = a_3 = -\sqrt{3}$.

5. D【解析】 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a} - \vec{b}|^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} = \sqrt{1 + 9 - 2 \times 1 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{13}$.

6. B 【解析】设 B 的横坐标为 x ，由图可知， $\tan\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ ， $\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ ，解得 $x = 3$ ，
 $\therefore B(3, 1)$ ， $\overrightarrow{OB} = (3, 1)$ ，又 $\tan\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2} = 0$ ， $x = 2$ 得 $A(2, 0)$ ， $\therefore \overrightarrow{BA} = (-1, -1)$ ，
 $\therefore \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = -1 \times 3 - 1 = -4$ 。

7. B 【解析】从 A 口袋中摸出一个球是红球的概率是 $\frac{1}{3}$ ，则摸出不是红球的概率为 $\frac{2}{3}$ ，从 B 口袋中摸出红球的概率是 $\frac{2}{5}$ ，则摸出不是红球的概率是 $\frac{3}{5}$ ，从两个口袋中各摸出一个球，那么这两个球中没有红球的概率是 $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ 。

8. B 【解析】一个为 4，两个为 0，共有 3 种；一个为 3，一个为 1，一个为 0，共有 $A_3^3 = 6$ 种；两个为 2，一个为 0，共有 3 种；一个为 2，两个为 1，共有 3 种。则“六合数”中首位为 2 的“六合数”共有 15 种。

二、填空题

1. $\frac{1}{2}$ 【解析】由题意知 $\begin{cases} 3(b-2) \neq 0 \\ 2a+2=1 \\ b^2-3b+3=1 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=1 \end{cases}$ ，所以 $a+b = \frac{1}{2}$ 。

2. $\sqrt{2}$ 【解析】 $\because \bar{z}(1-i)^2 i = 2+2i$ ， $\therefore \bar{z}(-2i)i = 2+2i$ ， $\bar{z} = 1+i$ ，

由共轭复数定义知 $z = 1-i$ ，由复数的模长知 $|z| = \sqrt{2}$ 。

3. 偶； $\{x|x > 1 \text{ 或 } -1 < x < 0\}$ 【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = 2^{|x|} - 2$ ， $\therefore f(-x) = f(x)$ ， $\therefore$ 函数 $f(x)$ 是偶函数， $\therefore x[f(x) + f(-x)] = 2xf(x) > 0$ ，即 $xf(x) > 0$ ， $\therefore$ 函数 $f(x) = 2^{|x|} - 2$ 。

$\therefore$ 当 $x \geq 0$ 时不等式 $xf(x) > 0$ 等价于 $2^{|x|} - 2 > 0$ ， $\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|x > 1\}$ ；

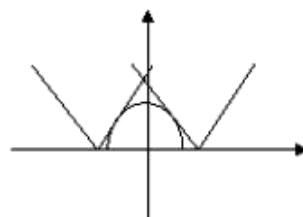
$\therefore$ 当 $x < 0$ 时不等式 $xf(x) > 0$ 等价于 $2^{|x|} - 2 < 0$ ， $\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|-1 < x < 0\}$ 。

综上所述，原不等式的解集为 $\{x|x > 1 \text{ 或 } -1 < x < 0\}$ 。

4. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 【解析】由题意得，令 $y = |x+a|$ ， $y = \sqrt{1-x^2}$ ，

结合图象可知，两条切线为临界点，此时 $a = \pm\sqrt{2}$ ，

实数 a 的取值范围为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 。



5. $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ 【解析】函数 $y = \log_2(x^2 - 2kx + k)$ 的值域为 $R \Rightarrow$ 函数 $g(x) = x^2 - 2kx + k$

取到所有正数, 则 $\Delta \geq 0$, 即 $4k^2 - 4k \geq 0$, 解得 $k \leq 0$ 或 $k \geq 1$.

6. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 【解析】当 $x > 0$ 时, $xf'(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, 观察函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的图象, 可得 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 上单调递减, 即当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$; 当 $x < 0$ 时, $xf'(x) < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, 观察函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 的图象, 可得 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 即当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore x \in (-\infty, 0)$. 综上, 不等式的解集为 $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

7. -2 或 6 【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 若 $a-1$ 与 5 重合, 可得 $a-1=5$, 解得 $a=6$; 若不重合, 则 $\frac{a-1+5}{2}=1$, 解得 $a=-2$. 综上 a 的值为 -2 或 6.

8. $f(x) = -\log_2(-x) (x < 0)$ 【解析】 $\because y = f(x)$ 的图象与函数 $g(x) = \log_2 x (x > 0)$ 的图象关于原点对称, $\therefore f(x) = -\log_2(-x) (x < 0)$.

三、解答题

【参考答案】

$$h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - 2x, \quad x > 0,$$

$$\therefore h'(x) = \frac{1}{x} - ax - 2.$$

(1) 若函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在单调减区间,

则当 $x > 0$ 时, $\frac{1}{x} - ax - 2 < 0$ 有解, 即 $a > \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ 有解.

设 $G(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$, 所以只要 $a > G(x)_{\min}$.

$$\text{又 } G(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - 1, \text{ 所以 } G(x)_{\min} = -1.$$

所以 $a > -1$, 即实数 a 的取值范围是 $(-1, +\infty)$.

(2) 由 $h(x)$ 在 $[1, 4]$ 上单调递减,

$$\therefore \text{当 } x \in [1, 4] \text{ 时, } h'(x) = \frac{1}{x} - ax - 2 \leq 0 \text{ 恒成立,}$$

则 $a > \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ 恒成立, 设 $G(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$, 所以 $a \geq G(x)_{\max}$.

又 $G(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - 1$, $x \in [1, 4]$,

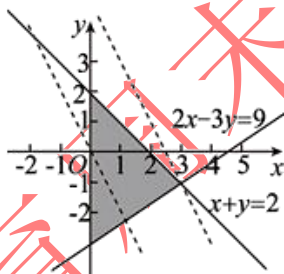
因为 $x \in [1, 4]$, 所以 $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, 所以 $G(x)_{\max} = -\frac{7}{16}$ (此时 $x = 4$), 所以 $a \geq -\frac{7}{16}$.

$\therefore h(x)$ 在 $[1, 4]$ 上为减函数. 故实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{7}{16}, +\infty\right)$.

第二周

一、选择题

1. D 【解析】如图所示, 画出可行域和目标函数,



根据平移知当 $x = 3$, $y = -1$ 时, $z = 2x + y$ 有最大值为 5.

2. B 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $S_7 = S_{16}$, 得 $7a_1 + 21d = 16a_1 + 120d$,

即 $a_1 + 11d = 0$, 又 $a_1 = 22$, 所以 $d = -2$, 所以 $a_n = 22 - 2(n-1) = 24 - 2n$, 令 $a_n = 0$, 得 $n = 12$,

所以数列 $\{a_n\}$ 满足: 当 $n \leq 11$ 时, $a_n > 0$; 当 $n = 12$ 时, $a_n = 0$; 当 $n \geq 13$ 时, $a_n < 0$.

所以 S_n 取得最大值时, n 的取值为 11 或 12.

3. B 【解析】由 $\frac{3}{x+1} < 1$ 得, $\frac{3}{x+1} - 1 = \frac{2-x}{x+1} < 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 2$, 由 p 是 q 的充分不必要条件知, $k > 2$.

4. C 【解析】零向量的方向是任意的, 它可以与任何向量 (包括零向量) 平行、垂直, ①正确; 根据单位向量定义可知②正确; 不是所有的单位向量都相等, 所有单位向量的模长相等, ③错误. 故正确的个数有 2 个.

5. C 【解析】由题意可得，样本中女生的数量 $= \frac{150 \times 4000}{30000} = 20$ 人.

6. D 【解析】二项式 $\left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(-2x^{-\frac{1}{2}}\right)^r = (-2)^r \cdot C_6^r \cdot x^{6-\frac{3}{2}r}$,

令 $6 - \frac{3r}{2} = 0$, 解得 $r = 4$, 故展开式中的常数项为 $(-2)^4 \cdot C_6^4 = 240$.

7. B 【解析】由题意得, $\because \vec{a} \parallel \vec{b}$, $\therefore \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} - \tan \alpha \cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\because \alpha$ 为锐角, $\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$.

8. D 【解析】令 $x^2 + ax + b = (x+c)(x-2)$,

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+c}{x+1} = 2,$$

$$\frac{2+c}{2+1} = 2, \text{ 可得 } c = 4, \text{ 因此 } x^2 + ax + b = (x+4)(x-2),$$

可得 $a = 2$, $b = -8$, 所以 $ab = -16$.

二、填空题

1. 9 【解析】 $\because 3^a \times 3^b = 3^{a+b} = 3$, $\therefore a+b=1$, $\therefore (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right) \geq 5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{4a}{b}} = 9$,

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$ 时, 即 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ 取等号, $\therefore \frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 9.

2. 150 【解析】由题意得, $2 \times 0.04 = 0.08$, $n = \frac{12}{0.08} = 150$.

3. $5\sqrt{3}$ 【解析】由题可知 $(2\cos C - 1)\cos C - 2(\cos C + 1) = 0$,

化简得 $2\cos^2 C - 3\cos C - 2 = 0$,

C 为三角形内角, 解得 $\cos C = -\frac{1}{2}$.

所以 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 + ab = (a+b)^2 - ab \geq (a+b)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 75$,

所以 $c \geq 5\sqrt{3}$.

4. $\frac{4}{81}$ 【解析】由 $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x \\ y = x - x^2 \end{cases}$ 解得 $x = 0$ 或 $x = \frac{2}{3}$,

$$\therefore \text{其围成图形的面积为} \int_0^{\frac{2}{3}} \left(x - x^2 - \frac{1}{3}x \right) dx = \frac{1}{3} \left(x^2 - x^3 \right) \Big|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{81}.$$

5. 13 【解析】当 $m \leq -4$ 时, 原式 $= -(m+1) - (m+4) + (3-m) + (5-m) = 3 - 4m \geq 19$;

当 $-4 < m \leq -1$ 时, 原式 $= (m+4) - (m+1) + (3-m) + (5-m) = 11 - 2m \geq 13$;

当 $-1 < m \leq 3$ 时, 原式 $= (m+1) + (m+4) + (3-m) + (5-m) = 13$;

当 $3 < m \leq 5$ 时, 原式 $= (m+1) + (m+4) + (m-3) + (5-m) = 7 + 2m > 13$;

当 $m > 5$ 时, 原式 $= (m+1) + (m+4) + (m-3) + (m-5) = 4m - 3 > 17$.

所以该式的最小值是 13.

6. $\frac{4}{3}$ 【解析】 $\because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$.

7. -10 【解析】第一次执行循环体时, $s = 2 - 1 = 1$, $k = 2$, 满足条件; 第二次执行循环体时, $s = 2 - 2 = 0$, $k = 3$, 满足条件; 第三次执行循环体时, $s = -3$, $k = 4$, 满足条件; 第四次执行循环体时, $s = -6 - 4 = -10$, $k = 5$, 不满足条件, 退出循环体, 输出 $s = -10$.

8. 1008 【解析】由题意得, $(x-2)^7$ 的展开式中 x , x^3 的系数分别为 $C_7^1(-2)^6$ 和 $C_7^3(-2)^4$,

故 $(x^2+1)(x-2)^7$ 的展开式中 x^3 项的系数为 $C_7^1(-2)^6 + C_7^3(-2)^4 = 1008$.

三、解答题

【参考答案】

(1) 证明: 当 $n=1$ 时, $2S_1 + 3a_1 = 6 + 4$, $\therefore a_1 = 2$,

当 $n \geq 2$ 时, 有
$$\begin{cases} 2S_n + 3a_n = 6n + 4 \\ 2S_{n-1} + 3a_{n-1} = 6n - 2 \end{cases},$$

两式相减得 $2a_n + 3a_n - 3a_{n-1} = 6$, $\therefore 5a_n - 3a_{n-1} = 6$, 故 $a_n - 3 = \frac{3}{5}(a_{n-1} - 3)$,

则 $a_n - 3 \neq 0$, 否则与 $a_1 = 2$ 矛盾, 故 $\frac{a_n - 3}{a_{n-1} - 3} = \frac{3}{5}$, $a_1 - 3 = -1$,

所以数列 $\{a_n - 3\}$ 是以 -1 为首项, $\frac{3}{5}$ 为公比的等比数列.

(2) 由 (1) 可得 $a_n - 3 = -1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$, $\therefore a_n = 3 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$,

$\therefore na_n = 3n - n \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$, 设数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

$$\text{则 } T_n = 3(1+2+3+\cdots+n) - W_n = \frac{3n(n+1)}{2} - W_n,$$

$$\text{其中 } W_n = 1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 + 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^1 + 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cdots + n \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}, \quad \textcircled{1}$$

$$\text{两边同乘以 } \frac{3}{5} \text{ 可得, } \frac{3}{5}W_n = \frac{3}{5} + 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \cdots + (n-1) \left(\frac{3}{5}\right)^n + n \left(\frac{3}{5}\right)^n, \quad \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得, } \frac{2}{5}W_n = 1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - n \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{5}} - n \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{5}{2} \left(n + \frac{5}{2}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^n,$$

$$\therefore W_n = \frac{25}{4} - \left(\frac{5n}{2} + \frac{25}{4}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^n, \text{ 所以 } T_n = \frac{3n(n+1)}{2} + \left(\frac{5n}{2} + \frac{25}{4}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{25}{4}.$$

第三周

一、选择题

1. A【解析】 $\because \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{4}, \therefore \cos\left[2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right] = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{7}{8}$, 即 $\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha\right) = \frac{7}{8}$,

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha\right)\right] = -\frac{7}{8}.$$

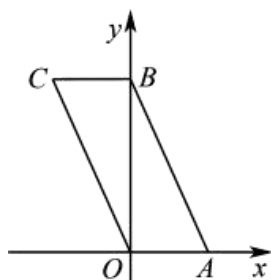
2. D【解析】向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{e}$ 上的投影为 $|\vec{a}|\cos\langle\vec{a}, \vec{e}\rangle = -\sqrt{3}$, $\therefore \cos\langle\vec{a}, \vec{e}\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\langle\vec{a}, \vec{e}\rangle = 150^\circ$.

3. A【解析】由定积分的几何意义得, 面积 $= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = -\cos \frac{2\pi}{3} - \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

4. D【解析】由题意得, $5 + \frac{p}{2} = 8$, $\therefore p = 6$, $\therefore F(3, 0)$, $\therefore$ 双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的一条渐近线为 $x - \sqrt{2}y = 0$, $\therefore F(3, 0)$ 到 $x - \sqrt{2}y = 0$ 的距离为 $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, $\therefore$ 以 F 为圆心, 且与双曲线

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \text{ 的渐近线相切的圆的方程是 } (x-3)^2 + y^2 = 3.$$

5. D 【解析】还原直观图为原图形如图所示.



因为 $O'A' = 2$, 所以 $O'B' = 2\sqrt{2}$, 还原回原图形后, $OA = O'A' = 2$, $OB = 2O'B' = 4\sqrt{2}$; 所以原图形的面积为 $2 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

6. D 【解析】由题意得, 点 $P(1,1,1)$ 在平面 xOy 的对称点 M 坐标 $(1,1,-1)$, $\therefore$ 光所走的路程是 $\sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{57}$.

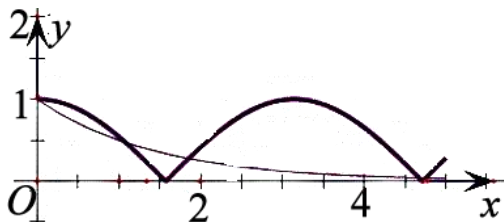
7. B 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 显然 $q=1$ 不符合题意.

由 $a_1 = 2$, $S_5 = a_5$ 得 $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 0$, 化简得 $q = -1$,

所以 $S_7 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = \frac{2 \times (1-(-1)^7)}{1+1} = 2$.

8. C 【解析】画出函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $[0, 5]$ 上的图象以及 $y = |\cos x|$ 在 $[0, 5]$ 上的图象, 结合图

象可知 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y = |\cos x|$ 在 $[0, 5]$ 上有 5 个交点, 即函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - |\cos x|$ 在 $x \in [0, 5]$ 上的零点个数为 5.



二、填空题

1. $-\frac{1}{2}$ 【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + n - 3}{2n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

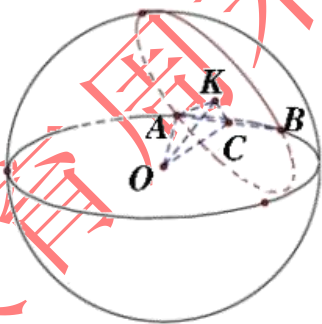
2. $-\frac{1}{2}$ 【解析】由题意可得, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$, 由于 $|\vec{a} + \lambda \vec{b}| = \sqrt{1 + \lambda^2 + \lambda}$, 故当 $\lambda = -\frac{1}{2}$ 时, $\sqrt{1 + \lambda^2 + \lambda}$ 取得最小值.

3. 58 【解析】从正方体的 8 个顶点中任选 4 个, 有 $C_8^4 = 70$ 种不同的选法, 其中这 4 个点在同一平面内的情况有侧面 6 种, 对棱面 6 种, 共 12 种不同的情况, 所以这 4 个点不在同一平面内的选法有 $70 - 12 = 58$ 种.

4. 4 【解析】以 $\vec{i}$, $\vec{j}$ 分别为 x 轴, y 轴的方向向量建立平面直角坐标系, 则 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, \lambda)$, $\therefore \vec{a}, \vec{b}$ 共线, $\lambda - 4 = 0$, $\therefore \lambda = 4$.

5. $\frac{280}{3}$ 【解析】 $280 \times 2 \div (3.5 - 1 + 3.5) = 560 \div 6 = \frac{280}{3}$ 千米/时.

6. 16π 【解析】如图所示, 设球 O 的半径为 r , AB 是公共弦, $\angle OCK$ 是面面角, 根据题意得, $OC = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, $CK = \frac{\sqrt{3}}{4}r$, 在 $\triangle OCK$ 中, $OC^2 = OK^2 + CK^2$, 即 $\frac{3}{4}r^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{16}r^2$, $\therefore r^2 = 4$, $\therefore$ 球 O 的表面积 $= 4\pi r^2 = 16\pi$.



7. $y = 0$ ($-3 \leq x \leq 3$), 即线段 AB 【解析】由题意, 设 P 的坐标为 (x, y) ,

$$\therefore |PA| + |PB| = 6,$$

$$\therefore \sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 6,$$

$$\therefore \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 6 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2},$$

$$\therefore 3 - x = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}, \text{ 化简可得 } y = 0 (-3 \leq x \leq 3), \text{ 即线段 } AB.$$

8. $(x+1)^2 + y^2 = 6$ 【解析】由题意可知圆心坐标为 $(-1, 0)$, 圆心到直线 $x + y + 3 = 0$ 的距离

$$d = \frac{|-1+3|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}, \quad r^2 = 2 + 4 = 6, \quad \therefore \text{圆的方程为 } (x+1)^2 + y^2 = 6.$$

三、解答题

【参考答案】

(1) $y = 4x + 4$ 与 y 轴交点: 令 $x = 0$ 代入直线 $y = 4x + 4$ 得 $y = 4$,

$\therefore B(0, 4)$, $\therefore$ 点 B 向右平移 5 个单位长度, 得到点 C , $\therefore C(5, 4)$.

(2) $y = 4x + 4$ 与 x 轴交点: 令 $y = 0$ 代入直线 $y = 4x + 4$ 得 $x = -1$,

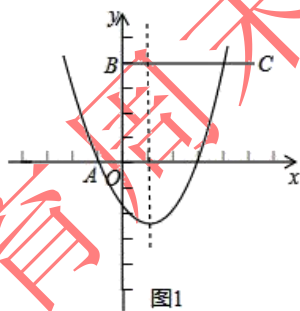
$\therefore A(-1, 0)$, 将点 $A(-1, 0)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx - 3a$ 中得 $a - b - 3a = 0$, 即 $b = -2a$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2a}{2a} = 1$.

(3) $\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3a$ 经过点 $A(-1, 0)$ 且对称轴为直线 $x = 1$,

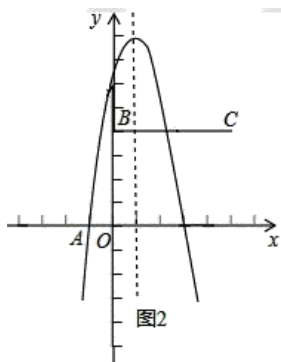
由抛物线的对称性可知抛物线也一定过 A 的对称点 $(3, 0)$.

I: $a > 0$ 时, 如图 1,



将 $x = 5$ 代入抛物线得 $y = 12a$, $\therefore 12a \geq 4$, 解得 $a \geq \frac{1}{3}$;

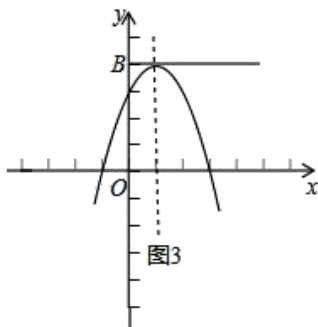
II: $a < 0$ 时, ①如图 2,



将 $x = 0$ 代入抛物线得 $y = -3a$, $\therefore$ 抛物线与直线 BC 恰有一个公共点,

$\therefore -3a > 4$, 解得 $a < -\frac{4}{3}$;

②当抛物线的顶点在线段 BC 上时, 则顶点为 $(1, 4)$, 如图 3,



将点 $(1, 4)$ 代入抛物线得 $4 = a - 2a - 3a$, 解得 $a = -1$.

综上所述, $a \geq \frac{1}{3}$ 或 $a < -\frac{4}{3}$ 或 $a = -1$.

第四周

一、选择题

1. B 【解析】 $\because \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2012} = \left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}\right)^{2012} = (-i)^{2012} = (i^4)^{503} = 1$.

2. A 【解析】①若“ p 或 q ”为真命题, 则 p 、 q 至少有一个真命题, 但不一定均为真命题, 故错误; ②命题“若 $x \geq 4$ 且 $y \geq 2$, 则 $x+y \geq 6$ ”的否命题为“若 $x < 4$ 或 $y < 2$, 则 $x+y < 6$ ”, 故错误; ③在 $\triangle ABC$ 中, “ $A > 30^\circ$ ”时, “ $\sin A > \frac{1}{2}$ ”不一定成立, “ $\sin A > \frac{1}{2}$ ”时, “ $A > 30^\circ$ ”一定成立, 故 “ $A > 30^\circ$ ”是 “ $\sin A > \frac{1}{2}$ ”的必要不充分条件, 故错误. 故正确命题有 0 个.

3. C 【解析】 $\because \sqrt{x} \geq 0, \therefore 1 - \sqrt{x} \leq 1, \therefore 0 < 3^{1-\sqrt{x}} \leq 3$, 故选 C.

4. D 【解析】由韦达定理可知 $x_1 + x_2 = -2, x_1 \cdot x_2 = a - 3$,

因为 $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$, 所以 $x_1 - x_2 = 0$,

两边平方得 $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 0$, 即 $4 - 4(a - 3) = 0$, 所以 $a = 4$.

5. D 【解析】设半圆与底边的交点是 D , 连接 AD ,

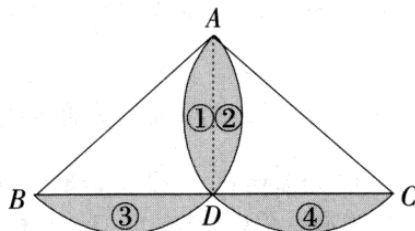
因为 $\angle ADB$ 是直径 AB 所对的圆周角, 所以 $\angle ADB = 90^\circ$, 即 AD 是 $\triangle ABC$ 的高.

又 $AB = AC$, 所以 AD 也是 $\triangle ABC$ 的中线,

D 是 BC 的中点, $BD = CD = 6, AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$.

如图可知，四个阴影部分的面积为两个半圆相加减去大三角形的面积，

$$\text{即 } 2 \times \frac{1}{2} \pi r^2 - S_{\triangle ABC} = \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} AD \cdot BC = 16\pi - 12\sqrt{7}. \text{ 故本题答案为 D.}$$



6. B 【解析】 $\because$ 集合 $A = \{x \mid |x-1| < 2\} = \{x \mid -1 < x < 3\}$, 集合 $B = \left\{x \mid \frac{1}{3} < 3^x < 9\right\} = \{x \mid -1 < x < 2\}$,

$$\therefore A \cap B = \{x \mid -1 < x < 2\}.$$

7. A 【解析】设幂函数 $y = f(x) = x^a$, $\therefore 3^a = \sqrt{3}$, $\therefore a = \frac{1}{2}$, $\therefore f(x) = x^{\frac{1}{2}} (x \geq 0)$, $\therefore \log_4 f(2) =$

$$\log_4 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

8. B 【解析】 $\because y' = \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - \sin x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$, $\therefore$ 曲线在点 M
 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{\left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}.$

二、填空题

1. 6; 12 【解析】 $42 = 2 \times 3 \times 7$, $30 = 2 \times 3 \times 5$, 42 和 30 的最大公因数是: $2 \times 3 = 6$.

$(42 + 30) \div 6 = 72 \div 6 = 12$ 瓶. 即最多可以分给 6 个小组, 每个小组分得橙汁和牛奶共 12 瓶.

2. $\sqrt{3}$ 【解析】侧视图是以三棱锥的高为高, 以底面三角形的高为底边的三角形, 所以其面积为 $\sqrt{3} \times 2 \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$

3. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ 【解析】 $\because 2x^2 - x \leq 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 \leq 0 \Rightarrow (2x+1)(x-1) \leq 0$, $\therefore$ 解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1.$

4. 80 或 341 【解析】 $\because S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 3a_1$, 解得 $q = 1$ 或 $q = -2$.

当 $q = 1$ 时, 等比数列的各项都是 8, $\therefore S_{10} = 80$;

当 $q = -2$ 时, $a_1 = -1$, 此时 $S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{1023}{3} = 341$.

5. 52; 54 【解析】 $a = 73 - 21 = 52$, $b = a + 2 = 52 + 2 = 54$.

6. 3π 【解析】 由记录 $\frac{m}{n} \approx 1:2$, 可见 $P(\text{落在}\odot O\text{内}) = \frac{m}{m+n} = \frac{1}{3}$,

又点 $P(\text{落在}\odot O\text{内}) = \frac{\text{圆}O\text{的面积}}{\text{圆}O\text{的面积} + \text{阴影的面积}}$, $\therefore \frac{S_{\text{圆}O}}{S_{\text{图形}ABC}} = \frac{1}{3}$, $S_{\text{图形}ABC} = 3\pi \text{ m}^2$.

7. $\frac{8}{15}$ 【解析】 由题意知, 这箱产品被用户拒绝接收表示的结果比较多, 从这箱产品被接收入手, 设这箱产品被用户拒绝接收事件为 A , 被接收则为对立事件 $\bar{A}$, 概率 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{8 \times 7 \times 6}{10 \times 9 \times 8} = \frac{8}{15}$. 所以这箱产品被用户拒绝接收的概率为 $\frac{8}{15}$.

8. $i > 10$ (或 $i \geq 11$) 【解析】 经过第一次循环得到 $S = \frac{1}{2}$, $i = 2$, 此时的 i 不满足判断框中的条件;

经过第二次循环得到 $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $i = 3$, 此时的 i 不满足判断框中的条件;

经过第三次循环得到 $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$, $i = 4$, 此时的 i 不满足判断框中的条件;

...

经过第十次循环得到 $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{20}$, $i = 11$, 此时的 i 满足判断框中的条件, 执行输出判断框中的条件是 $i > 10$ (或 $i \geq 11$).

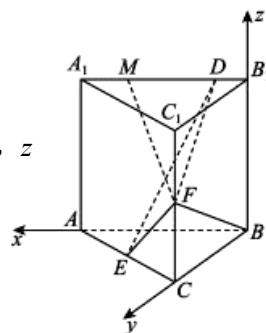
三、解答题

【参考答案】

(1) 证明: 由直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 可得 $BB_1 \perp$ 平面 ABC ,

且 $AB \perp BC$, 故以 B 为原点, BA , BC , BB_1 所在的直线分别为 x , y , z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $B(0, 0, 0)$, $F(0, 2, 1)$, $E(1, 1, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$,



设 $B_1D = m$, 且 $m \in [0, 2]$, 则 $D(m, 0, 2)$, $\therefore \overrightarrow{BF} = (0, 2, 1)$, $\overrightarrow{DE} = (1-m, 1, -2)$,

由 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DE} = 2 - 2 = 0$, $\therefore BF \perp DE$.

(2) 可设 $B_1M = n$, 且 $n \in [0, 2]$, 则 $M(n, 0, 2)$, $\overrightarrow{MF} = (-n, 2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$,

由异面直线 MF 与 AC 所成的角为 30° 可得 $\left| \cos \langle \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{AC} \rangle \right| = \left| \frac{2n+4}{\sqrt{n^2+5} \times 2\sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

整理得 $n^2 - 8n + 7 = 0$, 即 $n = 1$ 或 $n = 7$ (舍),

所以存在点 M , M 是 AB_1 中点.

第五周

一、选择题

1. B 【解析】由题意 $f(x) = \begin{cases} \log_3(x+3), & x > 0 \\ 2^{-x} + 2, & x \leq 0 \end{cases}$, 所以 $f(-2) = 2^{-(-2)} + 2 = 6$,

故 $f(f(-2)) = f(6) = \log_3(6+3) = 2$, 故选 B.

2. C 【解析】 $\because \cos \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$, 且 $\sin \theta < 0$, $\therefore \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}$,

$\therefore \sin \theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = -\frac{24}{25}$, $\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{24}{7}$.

3. D 【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} - \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin x \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin x$, $\therefore$ 它的周期为 2π 且是奇函数.

4. D 【解析】 $\because f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

$\therefore f'(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}\right]$,

只需将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 再把各点的纵坐标伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变).

5. B 【解析】函数 $f(x) = 2 \cos 2x - 4 \cos x = 2(2 \cos^2 x - 1) - 4 \cos x = 4\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3$, 当 $\cos x =$

$\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 -3 .

6. A 【解析】 $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} + 3y\overrightarrow{AC}$, 且点 F 在线段 BC 上 (不含端点), 所以 $x+3y=1$, 且 $x>0$,

$$y > 0, \text{ 则 } \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right) (x + 3y) = 6 + \frac{9y}{x} + \frac{x}{y} \geq 6 + 2\sqrt{\frac{9y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 12,$$

当且仅当 $\frac{9y}{x} = \frac{x}{y}$ 且 $x + 3y = 1$, 即 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{6}$ 时, 等号成立,

所以 $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} \geq 12$, 即 $\frac{3}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 12.

7. D 【解析】由抛物线 $y^2 = 8x$ 得到焦点 $F(2, 0)$, $\therefore$ 点 $F(2, 0)$ 到直线 $x - \sqrt{3}y = 0$ 的距离 $d =$

$$\frac{2}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = 1.$$

8. A 【解析】圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $M(0, 0)$, 半径 $r_1 = 1$; 圆 $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$, 即 $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ 的圆心 $N(0, 3)$, 半径 $r_2 = 2$. 两圆的圆心距 $|MN| = 3 = r_1 + r_2$, 所以两圆外切.

二、填空题

1. $2\sqrt{2}$ 【解析】根据已知中正八面体的俯视图为边长为 2 的正方形,

故正八面体 (面为 8 个正三角形) 的棱长为 2, 故原正四棱锥为棱长为 2 的正四面体,

故该正四面体的高为 $\sqrt{2}$, 其主视图由两个底面边长为 2, 高为 $\sqrt{2}$ 的等腰三角形组成,

故它的主视图面积 $S = 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

2. $e^x + \ln|x| + C$ 【解析】 $\int \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx = \int e^x dx + \int \frac{1}{x} dx = e^x + \ln|x| + C$.

3. 7 : 5 【解析】根据甲数减少它的 $\frac{1}{6}$, 即可将甲数看作单位 “1”, 减少它的 $\frac{1}{6}$ 后, 甲数就

是 $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, 再由题此时的甲仍然比乙数多 $\frac{1}{6}$, 可知此时甲数是乙数的 $1 + \frac{1}{6}$, 甲数此时是 $\frac{5}{6}$,

那么乙数是 $\frac{5}{6} \div \left(1 + \frac{1}{6} \right) = \frac{5}{7}$, 所以甲 : 乙 = $1 : \frac{5}{7} = 7 : 5$.

4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】由题意得, $\frac{n}{m} = \frac{1}{4}$, $\therefore m = 4n$, $\therefore$ 椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$ 中, $a^2 = m = 4n$, $b^2 = n$,

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{3n}{4n}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. $-a + 2b$ 【解析】由 a, b 在数轴上的位置关系可得: $a > 0 > b$ 且 $|a| > |b|$,

$$\therefore a+b>0, \quad b-2a<0, \quad \therefore |a+b|-|b-2a|=(a+b)-(-b+2a)=-a+2b.$$

$$6. \quad \frac{3}{2} \quad \text{【解析】} \because x>a, \quad \therefore 2x+\frac{2}{x-a}=2(x-a)+\frac{2}{x-a}+2a \geq 2\sqrt{2(x-a) \cdot \frac{2}{x-a}}+2a=2a+4,$$

$$\text{即 } 2a+4 \geq 7, \quad \therefore a \geq \frac{3}{2}, \quad \text{即 } a \text{ 的最小值为 } \frac{3}{2}.$$

7. 2【解析】 $f'(x)=3x^2-12$, 令 $f'(x)>0$, 得 $x<-2$ 或 $x>2$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 与 $(2, +\infty)$ 上单调递增; 令 $f'(x)<0$, 得 $-2<x<2$, 则 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递减. 故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值, 则 $a=2$.

8. 1359【解析】对于这些“渐升数”, 1 在首位、2 在百位的有 $C_7^2=21$ 个; 1 在首位、3 在百位、4 在十位有 5 个; 1 在首位、3 在百位、5 在十位的有 4 个. 应为 $21+5+4=30$, 所以第 30 个“渐升数”为 1359.

三、解答题

【参考答案】

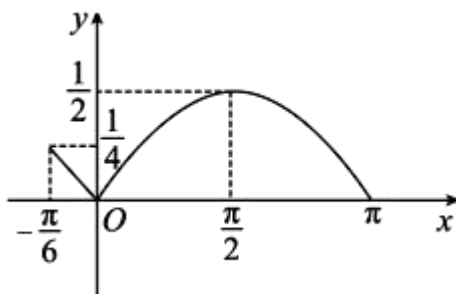
$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right) + \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{4}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{4}\cos 2x \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\text{由 } -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq 2x+\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ 得 } -\frac{3\pi}{8}+k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8}+k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi, \frac{\pi}{8}+k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$(2) \quad \text{令 } t=2x+\frac{\pi}{4}, \quad \text{当 } x \in \left[-\frac{5}{24}\pi, \frac{3}{8}\pi\right] \text{ 时, } t \in \left[-\frac{\pi}{6}, \pi\right],$$

作函数 $g(x) = \frac{1}{2}|\sin x|$, $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \pi\right]$ 的图象,



数形结合可得, 当 $m=0$ 或 $\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$ 时, $y=g(x)$ 与 $y=m$ 有两个交点,

即 $\frac{1}{2}|\sin t| - m = 0$ 有两解,

综上, 当函数 $y=|f(x)|-m$ 在区间 $\left[-\frac{5}{24}\pi, \frac{3}{8}\pi\right]$ 上恰有两个零点 x_1, x_2 时,

m 的取值范围为 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \{0\}$.

第六周

一、选择题

1. A 【解析】程序在执行过程中, S, k 的值依次为 $S=1, k=1$; $S=1+2=3, k=2$; $S=3+2^3=11, k=3$; $S=11+2^{11} > 100, k=4$, 程序结束, 输出 $k=4$.
2. C 【解析】根据条件①表明函数是中心对称图形, 排除选项 A. 条件②表明函数图象是向上凸的, 所以排除选项 B 和 D.
3. C 【解析】 $\because$ 由余弦定理可得, $\cos C = \frac{a}{2b} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow c^2 = b^2$, 即 $c=b$, $\therefore$ 这个三角形是等腰三角形.
4. A 【解析】正视图中, 几何体的外轮廓为矩形, 但上底面和前侧面的顶点应在上底面的中间, 故排除选项 BC; 侧视图中, 几何体的外轮廓为矩形, 但上底面和右侧面的顶点应在上底面的中间, 故排除选项 D, 选项 A 正确.
5. A 【解析】三棱锥 $S-ABC$ 的三条侧棱两两互相垂直, 且 $SA=2, SB=SC=4$, 则该三

棱锥的外接球，就是三棱锥扩展为长方体的外接球，所以长方体的对角线长度为

$\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$ ，所以三棱锥的外接球半径为 3.

6. D 【解析】令 $y = \log_a t$, $t = 1 - ax$, $\because a > 0$, $\therefore t = 1 - ax$ 在 $(1, 3)$ 上单调递减,

$\therefore f(x) = \log_a(1 - ax)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $(1, 3)$ 内单调递增,

$\therefore$ 函数 $y = \log_a t$ 是减函数, 且 $t(x) > 0$ 在 $(1, 3)$ 上成立, $\therefore \begin{cases} 0 < a < 1 \\ t(3) = 1 - 3a \geq 0 \end{cases}$, $\therefore 0 < a \leq \frac{1}{3}$.

7. D 【解析】 $\because a + b + c = 0$, $\therefore a + b = -c$, $\therefore (a + b)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = |c|^2$, $\therefore a \cdot b = -\frac{c^2}{2}$,

$\therefore \cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = -\frac{1}{4}$.

8. A 【解析】 $\because$ 直线 $ax + y - 5 = 0$ 与直线 $x + ay + 13 = 0$ 平行, $\therefore a \times a = 1 \times 1$, $\therefore a^2 = 1$, $\therefore a = \pm 1$,

当 $a = 1$ 时, 两直线方程分别为 $x + y - 5 = 0$ 与 $x + y + 13 = 0$ 满足平行,

当 $a = -1$ 时, 两直线方程分别为 $x - y + 5 = 0$ 与 $x - y + 13 = 0$ 满足平行,

$\therefore a = 1$ 是直线 $ax + y - 5 = 0$ 与直线 $x + ay + 13 = 0$ 平行的充分不必要条件.

二、填空题

1. 54 【解析】由题意得, $n \times \frac{2}{2+3+4} = 12$, 解得 $n = 54$.

2. -1 【解析】 $(a + 2i)i = b + i \Rightarrow -2 + ai = b + i$, $a = 1$, $b = -2$, $\therefore a + b = -2 + 1 = -1$.

3. $2\sqrt{3}$ 【解析】原式 $= 1 + 3 - \sqrt{3} - 4 + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

4. 90° 【解析】由 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 可知 O , B , C 三点共线, 且 O 是线段 BC 的中点,

故 BC 是圆 O 的直径, 则 $\angle BAC = 90^\circ$, 因此 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 90° .

5. $2\sin\sqrt{2}$ 【解析】 $f(x) = \int_{-x}^x \cos t dt = \sin t \Big|_{-x}^x = \sin x - \sin(-x) = 2\sin x$,

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, $\therefore f\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sin\sqrt{2}$.

6. 0 【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{2n^2} = 0$.

7. 180 【解析】由等差数列前 n 项和的性质得 S_{20} , $S_{40} - S_{20}$, $S_{60} - S_{40}$ 成等差数列,

所以 $2(S_{40} - S_{20}) = S_{20} + (S_{60} - S_{40})$, 得 $2(75 - 15) = 15 + (S_{60} - 75)$, 解得 $S_{60} = 180$.

8. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 【解析】由题意可得, $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 的夹角等于 120° , $\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 + 1 \times |\overrightarrow{BD}| \cos 120^\circ = 1 - \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$, 由于 D 为 BC 边上一动点, 故 $0 \leq |\overrightarrow{BD}| \leq 1$, $\therefore \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}| \leq 1$, 即 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

三、解答题

【参考答案】

(1) 因为 $|PF_1| + |PF_2| = 4$, 所以 $2a = 4$, $a = 2$,

又点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 为椭圆上一点, 则有 $\frac{1^2}{4} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{b^2} = 1$, 所以 $b^2 = 3$,

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由 (1) 可得, $c^2 = a^2 - b^2 = 1$, 则圆 O 的圆心为 $O(0, 0)$, 半径为 $r = 1$,

直线 $l: y = kx - m$ 可化为 $kx - y - m = 0$.

由直线 l 与圆 O 相切, 得 $\frac{|-m|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$, 整理可得 $m^2 = 1 + k^2$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立直线与椭圆方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = kx - m \end{cases}$, 得 $(3 + 4k^2)x^2 - 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$,

$\Delta = (-8km)^2 - 4(4m^2 - 12)(3 + 4k^2) = 48(4k^2 - m^2 + 3)$, 又 $m^2 = 1 + k^2$,

则 $\Delta = 48(3k^2 + 2) > 0$ 恒成立,

所以 $x_1 + x_2 = \frac{8km}{3 + 4k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2}$,

$y_1 y_2 = (kx_1 - m)(kx_2 - m) = k^2 x_1 x_2 - mk(x_1 + x_2) + m^2$

$$= k^2 \cdot \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} - mk \cdot \frac{8km}{3 + 4k^2} + m^2 = \frac{3m^2 - 12k^2}{3 + 4k^2}.$$

因为 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{3}{2}$, 所以 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = -\frac{3}{2}$,

$$\text{即 } \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} + \frac{3m^2 - 12k^2}{3 + 4k^2} = \frac{7(k^2 + 1) - 12k^2 - 12}{3 + 4k^2} = \frac{-5k^2 - 5}{3 + 4k^2} = -\frac{3}{2},$$

化简可得, $k^2 = \frac{1}{2}$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

第七周

一、选择题

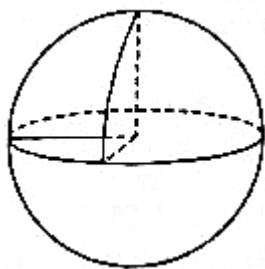
1. D【解析】由 $zi = 3 + 4i$ 得 $z = \frac{3 + 4i}{i} = \frac{3i - 4}{-1} = 4 - 3i$, $\therefore \bar{z} = 4 + 3i$, $\therefore \bar{z}$ 对应的点为 $M(4, 3)$,

$$\therefore \text{所求距离 } d = \frac{|3 \times 4 - 3 + 1|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

2. D【解析】 $f(x) = (x - 3)e^x$, 则令 $f'(x) = (x - 2)e^x > 0$, 则 $x > 2$, 所以函数 $f(x) = (x - 3)e^x$ 的单调递增区间是 $(2, +\infty)$.

3. A【解析】如图, 可知是一个球被切掉左上角的 $\frac{1}{8}$.

设球的半径为 R , 则 $V = \frac{7}{8} \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{28\pi}{3}$, 解得 $R = 2$, 所以它的表面积是 $\frac{7}{8}$ 的球面面积和三个扇形面积之和 $S = \frac{7}{8} \times 4\pi \times 2^2 + 3 \times \frac{1}{4} \pi \times 2^2 = 17\pi$.



4. C【解析】因为 $f(x)$ 是 R 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0$, 由 $f(2) + f(0) = 1$ 可得 $f(2) = 1$;

即 $f(2) = 4 - \frac{a}{2} = 1$, 得 $a = 6$, 所以 $f(x) = 2x - \frac{6}{x}$, $f(-6) = -f(6) = -\left(2 \times 6 - \frac{6}{6}\right) = -11$.

5. D【解析】切线的斜率为1, 令 $y' = \frac{1}{x} = 1$, $x=1$, 故切点为(1,1), 代入曲线方程得 $a=1$.

6. D【解析】若焦点在 x 轴上, 则 $\frac{\frac{1}{m} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{m}} = \frac{1}{2}$, 解得 $m=2$; 若焦点在 y 轴上, $\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{m}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$,

解得 $m=8$. 所以, m 的值为 2 或 8.

7. A【解析】由于函数 $f(x) = a \cdot 2^x + m$ 的反函数图象过点(2, 0), 则点(0, 2)在函数 $y = f(x)$

的图象上, 由题意可得 $\begin{cases} a+m=2 \\ 2a+m=3 \end{cases}$, 解得 $a=m=1$, 因此 $f(x) = 2^x + 1$.

8. C【解析】 $\because$ 甲组学生成绩的平均数是 88, $\therefore$ 由茎叶图知 $78+86+84+88+95+90+m+92=88 \times 7$, $\therefore m=3$, 又乙组学生成绩的中位数是 89, $\therefore n=9$, $\therefore m+n=3+9=12$.

二、填空题

1. $[1, +\infty)$ 【解析】 $p: m < 0$, $q: \Delta = 4m^2 - 4 < 0 \Rightarrow -1 < m < 1$, 若 $p \vee q$ 为假, 那么 p ,

q 都是假, 即 $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -1 \text{ 或 } m \geq 1 \end{cases}$, 所以 $m \geq 1$, 区间为 $[1, +\infty)$.

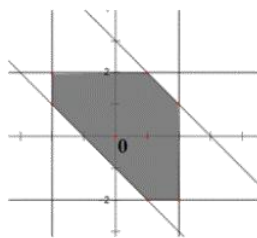
2. 144【解析】四道题选了 3 道题, 说明有两个人答的是同一道题, 所以共有 $C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot A_3^3 = 144$ 种方法.

3. 八【解析】设商品的进价是 1, 则定价是 $1 \times (1+50\%) = 1.5$, 售价是 $1 \times (1+20\%) = 1.2$, 折扣为 $1.2 \div 1.5 \times 100\% = 80\%$, $80\% =$ 八折.

4. $[-3, 1]$ 【解析】由题设 $C(1, 0)$ 到直线 $x + \sqrt{3}y + b = 0$ 的距离 $d = \frac{|1+b|}{2} \leq 1$, 解得 $-3 \leq b \leq 1$.

5. $\frac{11}{16}$ 【解析】圆心到直线的距离 $d = \frac{|a+b-1|}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$, 即 $|a+b-1| < 2 \Rightarrow -1 < a+b < 3$, 如

图, 阴影区域的面积为 $S = 4 \times 4 - \frac{1}{2}(1 \times 1 + 3 \times 3) = 11$, 所以 $P = \frac{11}{16}$.



6. $\left[0, \frac{9}{8}\right]$ 【解析】由 $f(x) = \cos 2x + \sin x = 1 - 2\sin^2 x + \sin x = -2\left(\sin x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$,

又 $\because \sin x \in [0, 1]$, 得 $f(x) \in \left[0, \frac{9}{8}\right]$.

7. ② 【解析】 $y = ax + \frac{1}{a}$ 可以看作一次函数, 其斜率 a 和截距 $\frac{1}{a}$ 同号, 只有②符合, 其斜率和截距都为负.

8. ± 8 【解析】令 $y = 0$ 代入圆的方程, 可得 $x^2 - 2ax \cos \theta - a^2 \sin^2 \theta = 0$, 即 $(x - a \cos \theta)^2 = a^2$,

$x = a \cos \theta \pm a$, 截 x 轴所得弦长为 16, $\therefore 2|a| = 16$, $\therefore a = \pm 8$.

三、解答题

【参考答案】

(1) $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \alpha \\ y = 1 + \sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$ 消去参数 α ,

得 C_1 的普通方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

$\begin{cases} x = 3 \cos \beta \\ y = \sqrt{6} \sin \beta \end{cases}$ 消去参数 β ,

得 C_2 的普通方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$.

(2) 由 (1) 可知 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 2(\cos \theta + \sin \theta)$,

C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{18}{2 + \sin^2 \theta}$,

射线 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 与 C_1 的交点为 A 的极径 $\rho_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$,

射线 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 与 C_2 的交点为 B 的极径 $\rho_2 = \sqrt{\frac{18}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$.

故 $|AB| = |\rho_1 - \rho_2| = 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{5}}{5}$.

第八周

一、选择题

1. A 【解析】 $\because$ 已知点 D, E, F 分别为边 BC, AD, CE 的中点,

$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, BE 是 $\triangle ABD$ 的中线, CE 是 $\triangle ACD$ 的中线, BF 是 $\triangle BCE$ 的中线,

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 4\text{cm}^2$,

$\because$ 点 E 是 AD 的中点, $\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD} = 2\text{cm}^2$, $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle CAD} = 2\text{cm}^2$,

$\therefore S_{\triangle BCE} = S_{\triangle BDE} + S_{\triangle CDE} = 2 + 2 = 4\text{cm}^2$, $\because$ 点 F 是 CE 的中点, $S_{\triangle BFE} = \frac{1}{2}S_{\triangle BCE} = 2\text{cm}^2$.

2. B 【解析】设向量 $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, 则 $(-1, 2) = \lambda(1, 1) + \mu(1, -1)$, 即 $\begin{cases} -1 = \lambda + \mu \\ 2 = \lambda - \mu \end{cases}$, 解此方程

得 $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = -\frac{3}{2} \end{cases}$, 故 $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$.

3. A 【解析】 $\because$ 公差 $d = 1$, $S_8 = 4S_4$, $\therefore 8a_1 + \frac{1}{2} \times 8 \times 7 = 4\left(4a_1 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3\right)$, 解得 $a_1 = \frac{1}{2}$,

$\therefore a_{10} = a_1 + 9d = \frac{1}{2} + 9 = \frac{19}{2}$.

4. B 【解析】 $\because \vec{m} = (\cos A, \sin A)$, $\vec{n} = (\cos B, -\sin B)$,

$\therefore \vec{m} \cdot \vec{n} = \cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$,

$\therefore -\cos C = \frac{1}{2}$, 则 $\cos C = -\frac{1}{2}$,

$\because 0 < C < \pi$, $\therefore C = \frac{2\pi}{3}$.

5. A 【解析】由题意可得, $x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 4y - 3 = 0$ 解得两圆的交点为:

$M\left(\frac{2+\sqrt{10}}{2}, \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)$ 与 $N\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}, \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$,

$\therefore$ 所求圆经过此两点, 连接 MN , MN 即是所求圆的一段弦, $\therefore MN$ 的斜率 $k_1 = 1$,

$\therefore$ 其垂直平分线斜率 $k_2 = -1$, MN 的中点 P 坐标为 $(1, 1)$,

$\therefore$ 其垂直平分线为 $y = -x + 2$, 垂直平分线与直线 $x - y - 4 = 0$ 上的交点即圆心, 联立两方程,

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases},$$

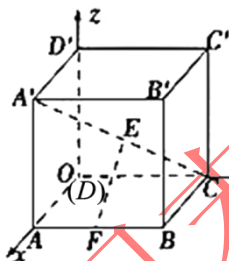
$$\therefore \text{圆心 } O \text{ 的坐标为 } (3, -1), r = \sqrt{\left(3 - \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)^2 + \left(-1 - \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore \text{所求圆的方程为 } (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13, \text{ 即 } x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0.$$

6. B 【解析】如图所示，在空间直角坐标系中，有一棱长为 a 的正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ ，

$\therefore A(a, 0, 0), B(a, a, 0), C(0, a, 0), A'(a, 0, a)$ ， $A'C$ 的中点为 E 与 AB 的中点为 F ，

$$\therefore F\left(a, \frac{a}{2}, 0\right), E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \therefore |EF| = \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$



7. C 【解析】由题意得，设 $M(x_0, y_0), N(x_0, -y_0)$ ， $\therefore A(-a, 0), B(a, 0)$ ，

$$\therefore M, N \text{ 在椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0), |k_1 \cdot k_2| = \frac{1}{4},$$

$$\therefore |k_1 \cdot k_2| = \left| \frac{y_0}{x_0 + a} \cdot \frac{-y_0}{a - x_0} \right| = \frac{y_0^2}{a^2 - x_0^2} = \frac{b^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)}{a^2 - x_0^2} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore 4b^2 = 4(a^2 - c^2) = a^2, \text{ 即 } 3a^2 = 4c^2, \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

8. D 【解析】 $\therefore AB, AC, AD$ 两两互相垂直，且 $AB = AC = \sqrt{6}, AD = 2$ ，

$\therefore$ 球 O 的直径为 $\sqrt{6+6+4} = 4$ ， $\therefore$ 球 O 的半径为 2，

$$\therefore \angle AOD = \frac{\pi}{3}, \therefore A, D \text{ 两点间的球面距离为 } \frac{\pi}{3} \times 2 = \frac{2\pi}{3}.$$

二、填空题

1. < 2 (或 $x \leq 2$) 【解析】 $\therefore y = (x - 2)^2 + 3$ ，函数开口向上，对称轴 $x = 2$ ，所以 $x < 2$ (或 $x \leq 2$) 时， y 随着 x 的增大而减小，当 $x \geq 2$ (或 $x > 2$) 时， y 随着 x 的增大而增大。

2. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$ 【解析】由三视图可知，该几何体为直三棱锥，底面为等腰直角三角形，把三棱锥补成长方体，三棱锥和长方体具有相同的外接球， $2R = \sqrt{4+2+2} = 2\sqrt{2}$ ， $\therefore R = \sqrt{2}$ ，

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}.$$

3. ② 【解析】如果三条直线交于一点，则此时三条直线不一定在同一平面，①错误；若四点不共面，则一定不存在三点共线，若有三点共线，则第四点与此线确定一个平面，这样就会出现四点共面，与已知条件不符合，②正确；在空间中四边相等的四边形可能是空间四边形，③错误；空间四边形中也存在三个角是直角的情况，④错误。

4. 1 【解析】设 C 到平面 BED 的距离为 h ， $\therefore V_{C-BDE} = V_{E-CDB}$ ， $\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle BDE} \cdot h = \frac{1}{3}S_{\triangle BCD} \cdot CE$ ，
 $\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot CD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ ， $CE = \sqrt{2}$ ，

$$\triangle BDE \text{ 的高为 } \sqrt{BE^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2，S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}，$$

$$\therefore h = \frac{S_{\triangle BCD} \cdot CE}{S_{\triangle BDE}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1.$$

5. $\sqrt{3}$ 【解析】 $\because AD$ 是 $\odot O$ 的切线， $\therefore \angle EAB = \angle C$ ， $\because AE$ 平分 $\angle CAB$ ， $\therefore \angle EAB = \angle CAE$ ，
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ， $\therefore \angle CAD + \angle C = 90^\circ$ ， $\therefore \angle EAD = 30^\circ$ ，在 $Rt \triangle EAB$ 中， $AB = AE \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}$ 。

6. 240 【解析】甲、乙捆绑后再排序，不同站法有 $A_2^2 A_3^3 = 240$ 种。

7. $\frac{1}{22}$ 【解析】法 1：根据柯西不等式 $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$ ，
 将问题中的 x, y, z 分别对应 a_1, a_2, a_3 ；2, 3, 3 分别对应 b_1, b_2, b_3 ，有 $(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 3^2 + 3^2) \geq (2x + 3y + 3z)^2 = 1$ ， $\therefore$ 有 $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{22}$ ，当且仅当 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{3}$ 时取得等号，即 $x = \frac{1}{11}$ ， $y = z = \frac{3}{22}$ 时， $x^2 + y^2 + z^2$ 取得最小值 $\frac{1}{22}$ 。

法 2：设点 P 的坐标为 (x, y, z) 是空间直角坐标系一点，且满足 $2x + 3y + 3z = 1$ ， $\therefore$ 点 P 是平面 $2x + 3y + 3z = 1$ 上的任意一点，由其几何意义可知： $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值是坐标原点到

平面 $2x + 3y + 3z = 1$ 的距离的平方，由空间中点到平面的距离得 $\left(\frac{|2 \times 0 + 3 \times 0 + 3 \times 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2}} \right)^2 =$

$$\frac{1}{22}.$$

8. $-\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$, 所以 $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$

$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{1}{2}.$$

三、解答题

【参考答案】

(1) 参加自主招生的学生从 8 个试题中随机挑选出 4 个进行作答, 至少答对 3 个才能通过初试, 在这 8 个试题中甲能答对 6 个,

$$\therefore \text{甲通过自主招生初试的概率为 } P_1 = \frac{C_6^3 C_2^1}{C_8^4} + \frac{C_6^4}{C_8^4} = \frac{11}{14},$$

$$\therefore \text{乙通过自主招生初试的概率为 } P_2 = C_4^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{189}{256}.$$

$$\therefore \frac{11}{14} > \frac{189}{256}, \therefore \text{甲通过自主招生初试的可能性更大.}$$

(2) 根据题意, 乙答对题的个数 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, 且 $X \sim B\left(4, \frac{3}{4}\right)$.

$$P(X=k) = C_4^k \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{4-k} \quad (k=0, 1, 2, 3, 4), \text{ 且 } Y=5X$$

$\therefore Y$ 的概率分布列为:

Y	0	5	10	15	20
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

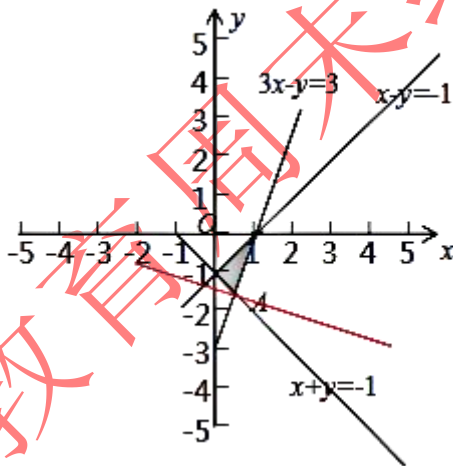
$$\therefore E(Y) = 5np = 5 \times 4 \times \frac{3}{4} = 15, \quad D(Y) = 25np(1-p) = 25 \times 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{75}{4}.$$

第九周

一、选择题

1. D 【解析】由 $z(2+i^7)=3+i$ 可得, $z=\frac{3+i}{2+i^7}=\frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=1+i$, 则复数 z 的虚部是 1.

2. C 【解析】作出不等式组对应的平面区域图 (如图所示), 由 $z=x+3y$ 得 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{z}{3}$, 平移直线 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{z}{3}$, 由图象可知当直线 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{z}{3}$ 经过点 A 时, 直线 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{z}{3}$ 的截距最小, 此时 z 最小, 由 $\begin{cases} x+y=-1 \\ 3x-y=3 \end{cases}$, 解得 $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, 代入目标函数得 $z=\frac{1}{2}-3\times\frac{3}{2}=-4$, 即 $z=x+3y$ 的最小值为 -4 .



3. B 【解析】 $\because \sin(\pi+\alpha)=\frac{1}{2}$, $\therefore \sin\alpha=-\frac{1}{2}$, $\because \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\therefore \alpha=-\frac{\pi}{6}$,

$$\therefore \tan 2\alpha = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

4. C 【解析】由题可知, 本题的框图作用是计算 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2013}$, 其分母的通项为 $2i-1$,

令 $2i-1=2013$, 解得 $i=1007$, 由此可知, $i\leq 1007$, 循环, 当 $i>1007$ 时, 结束. 故判断框内应填入 $i\leq 1007$.

5. A 【解析】 $x^2+y^2+2x-6y-6=0$ 化为标准方程为 $(x+1)^2+(y-3)^2=16$, 圆心为 $(-1, 3)$,

半径为 4. 圆心到直线的距离 $d = \frac{|4 \times (-1) - 3 \times 3 + 5\sqrt{10}|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{5\sqrt{10} - 13}{5} < 4$, 且 $(-1, 3)$ 不是直线

$4x - 3y + 5\sqrt{10} = 0$ 上的点, 所以直线与圆相交不过圆心.

6. B 【解析】“自然数 a, b, c 中至多有一个是偶数” 其意思为 “三个自然数 a, b, c 中全是奇数或一个偶数、两个奇数”, 其否定为 “三个自然数 a, b, c 中两个偶数一个奇数或全是偶数”, 即 “自然数 a, b, c 中至少有两个是偶数”, 故选 B.

7. A 【解析】设甲一次投中为事件 A , $P(A) = 0.7$, 则甲投篮一次投不中为事件 $\bar{A}$, $P(\bar{A}) = 1 - 0.7 = 0.3$; 同理设乙一次投中为事件 B , $P(B) = 0.7$, 则乙一次投不中为事件 $\bar{B}$, $P(\bar{B}) = 1 - 0.7 = 0.3$.

$$P = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0.7 \times 0.3 + 0.7 \times 0.3 = 0.42.$$

8. C 【解析】由图可知, 底部周长小于 100cm 的频率为 $(0.01 + 0.02) \times 10 = 0.3$, 则底部周长大于 100cm 的频率为 $1 - 0.3 = 0.7$, 那么在这片树木中底部周长大于 100cm 的株树大约为 $10000 \times 0.7 = 7000$.

二、填空题

1. 9 【解析】中午 1:30 = 13:30, 上午 9:30 - 上午 7:00 = 2 小时 30 分钟,

13:30 - 11:00 = 2 小时 30 分钟, 下午 9:00 - 下午 5:00 = 4 小时,

故 2 小时 30 分钟 + 2 小时 30 分钟 + 4 小时 = 9 小时.

2. 12 【解析】使用系统抽样方法, 从 840 人中抽取 42 人, 即从 20 人抽取 1 人, 所以从编号 1~480 的人中, 恰好抽取 $\frac{480}{20} = 24$ 人, 接着从编号 481~720 共 240 人中抽取 $\frac{240}{20} = 12$ 人.

3. $\frac{2\pi}{3}$ 【解析】设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ , $|\vec{a}|^2 = 1$, $|\vec{b}|^2 = 4$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,
则 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1}{1 \times 2} = -\frac{1}{2}$, $\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$.

4. 5 【解析】设 $C(0, y)$, 所以 $|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$,

$$|AC| = \sqrt{(0-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{1+y^2}, \quad |BC| = \sqrt{(0-2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{y^2 - 4y + 8},$$

因为 $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, 所以由余弦定理得 $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos \frac{\pi}{4}$,

即 $y^2 - 4y + 8 = 5 + 1 + y^2 - \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{1 + y^2}$, 解得 $y = 3$, 所以 $C(0, 3)$,

所以 $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 3)$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + 2 \times 3 = 5$.

5. $\frac{1}{2}$ 【解析】 $\because a_n \cdot a_{n+1} = 1$ ①, $\therefore$ 用 $n+1$ 代替 n , 得 $a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 1$ ②, 比较①②, 得 $a_{n+2} = a_n$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是周期为 2 的数列, 可得 $a_{10} = a_8 = a_6 = a_4 = a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$.

6. 18 【解析】由于正数 x, y 满足 $x + 2y = 1$,

$$\text{则 } \frac{x+8y}{xy} = \left(\frac{1}{y} + \frac{8}{x}\right)(x+2y) \geq 10 + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{16y}{x}} = 18,$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} x+2y=1 \\ \frac{x}{y} = \frac{16y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases} \text{ 时, 等号成立.}$$

7. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ 【解析】 $\because e^2 = \frac{m^2 + n^2}{m^2} = 4$, $\therefore \frac{n^2}{m^2} = 3$, $\frac{n}{m} = \pm\sqrt{3}$, 则直线 $mx + ny - 1 = 0$ 的

斜率 $k = -\frac{m}{n} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, 直线 $mx + ny - 1 = 0$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$.

8. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ 【解析】设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 左焦点 $F_1(-c, 0)$, 将横坐

标 $-c$ 代入方程, 得 $y = \pm\frac{b^2}{a}$, $\therefore \frac{b^2}{a} = 2$ ①, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ②, $a^2 = b^2 + c^2$ ③, 联立①②③解得 $a = 4$,

$b = 2\sqrt{2}$, $\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$.

三、解答题

【参考答案】

2 个仓库三人合作工作的时间: $2 \div \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right) = 8$ (小时)

丙在 A 仓库的工作时间: $\left(1 - \frac{1}{10} \times 8\right) \div \frac{1}{15} = 3$ (小时)

丙在 B 仓库的搬运时间: $8 - 3 = 5$ (小时)

答: 丙帮助甲 3 小时, 帮助乙 5 小时.

第十周

一、选择题

1. D 【解析】集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 4 < 0\} = \{x | 1 < x < 4\}$, $\complement_R B = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 4\}$,

$$\therefore A \cap (\complement_R B) = \{0, 1\}.$$

2. C 【解析】复数 $z = \frac{2+ai}{1+2i} = \frac{(2+ai)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2+2a+(a-4)i}{5}$,

则 z 在复平面对应的点 $\left(\frac{2+2a}{5}, \frac{a-4}{5}\right)$ 在第四象限, $\therefore \begin{cases} \frac{2+2a}{5} > 0 \\ \frac{a-4}{5} < 0 \end{cases}$, 解得 $-1 < a < 4$,

所以 a 的最大值为 3.

3. B 【解析】对于①, $\therefore$ 在集合 M 中, 当 $\Delta = 4 - 4a \geq 0$ 时, 方程有解, 集合不是空集;

对于②, $-x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 < 0$, $\therefore \Delta = -7 < 0$, $\therefore N = \emptyset$;

对于③, $P = \{x | y = \lg(-x)\} \cap \{y | y = \lg(-x)\} = \{x | x < 0\} \cap R = \{x | x < 0\}$, 不是空集;

对于④, $Q = \{y | y \geq 0\} \cap \{y | y \in R\} = \{y | y \geq 0\}$, 不是空集.

综上, 是空集的有 1 个.

4. B 【解析】第一次循环, 可得 $p = 1 \times 2 = 2$; 第二次循环, 可得 $p = 2 \times 3 = 6$; 第三次循环, 可得 $p = 6 \times 4 = 24$, 退出循环, 输出 $p = 24$.

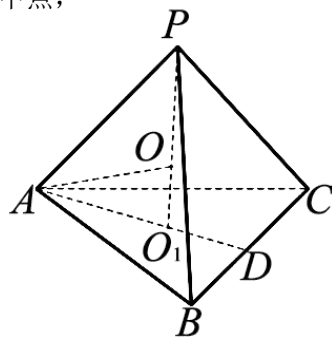
5. A 【解析】根据对称性可知点 P 在平面 ABC 的投影为 $\triangle ABC$ 的中心,

球心 O 在直线 PO_1 上, 延长 AO_1 交 BC 于点 D , 故点 D 是 BC 的中点,

$$AO_1 = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad PO_1 = \sqrt{PA^2 - AO_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

设球半径为 R , 则 $R^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - R\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$, 解得 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{故体积 } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi.$$



6. D 【解析】 $f(x) = 2\sqrt{3} \cos^2 x - 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \times \frac{1 + \cos 2x}{2} - \sin 2x - \sqrt{3} = 2 \cos(2x + \frac{\pi}{6})$, 平移后函数 $y = 2 \cos(2x + 2t + \frac{\pi}{6})$ 为奇函数, $\therefore 2t + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 解得 $t = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$.

$\frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\therefore$ 当 $k=0$ 时, t 有最小值 $\frac{\pi}{6}$.

7. B 【解析】设直线的倾斜角为 θ . 直线方程变形为 $y = -x \sin \alpha - 2$, 直线的斜率 $k = -\sin \alpha$.

因为 $\alpha \in \mathbb{R}$, $k = \tan \theta \in [-1, 1]$, 考虑到侧斜角 $\theta \in [0, \pi)$, 所以 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. 故本题

答案为 B.

8. C 【解析】由已知得, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$

$$\therefore |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + 2\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2} = \sqrt{2^2 + 4 \times 1 + 4 \times 1^2} = 2\sqrt{3}.$$

二、填空题

1. $-\frac{2}{3}$ 【解析】由 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (4, m+6)$, 又 A, C, D 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AD}$ 且

$$\lambda \in \mathbb{R}, \text{ 则 } \begin{cases} -\lambda = 4 \\ 2m\lambda = m+6 \end{cases}, \text{ 可得 } \begin{cases} \lambda = -4 \\ m = -\frac{2}{3} \end{cases}, \text{ 故答案为 } -\frac{2}{3}.$$

2. $\frac{1}{12}$ 【解析】开机密码可能有 $(4, A), (4, a), (4, B), (4, b), (5, A), (5, a), (5, B), (5, b), (6, A), (6, a), (6, B), (6, b)$, 共 12 种可能, 则小明输入一次密码能够成功登陆的概率是 $\frac{1}{12}$.

3. $\sqrt{3}$ 【解析】 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}b \times 2 \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b=1$, 则 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ = 3$, 所以 $a = \sqrt{3}$, 即 $BC = \sqrt{3}$.

4. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 【解析】圆的标准方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 4$, 圆心为 $(3, 0)$, 半径为 $r=2$,

$\therefore$ 一条渐近线方程为 $bx - ay = 0$, $\therefore$ 圆心到渐近线的距离为 $d = \frac{3b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

$\therefore$ 弦长为 2, $\therefore \left(\frac{3b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 2^2 - 1^2$, 化简可得 $a^2 = 2b^2$, 即 $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{3}{2}a^2$, 则 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

5. $2n-1$ 【解析】由题意得, $2(a_n a_{n+1} + 1) = tn(1 + a_n)$, 即 $a_n a_{n+1} + 1 = tS_n$,

可得 $a_{n+1} a_{n+2} + 1 = tS_{n+1}$, 两式相减得, $a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = ta_{n+1}$,

由于 $a_{n+1} \neq 0$, 所以 $a_{n+2} - a_n = t$, 由于 $a_1 = 1$, $2(a_1 a_2 + 1) = t(1 + a_1)$, 可得 $a_2 = t - 1$,

由 $a_{n+2} - a_n = t$ 可知, $a_3 = t + 1$, 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $2a_2 = a_1 + a_3$, 解得 $t = 4$,

故 $a_{n+2} - a_n = 4$ ，由此可得 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列， $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$ 。

6. $f(7) < f\left(-\frac{5}{2}\right) < f(4)$ 【解析】 $\because f(x+1) = -f(x)$ ， $\therefore f(x+2) = -f(x+1) = f(x)$ ，即周期为 2，又其为偶函数， $\therefore f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ ， $f(7) = f(1)$ ， $f(4) = f(0)$ ，根据在区间 $[0, 1]$ 上单调递减可知， $f(7) < f\left(-\frac{5}{2}\right) < f(4)$ 。

7. 3 【解析】由题意直线 AB 与直线 $3x - y + 1 = 0$ 垂直，即 $\frac{a-0}{1-0} = 3$ ，解得 $a = 3$ 。

8. 2 【解析】 $f'(x) = e^x + a \cos x$ ，由题意知， $f'(0) = 1 + a = 3$ ，解得 $a = 2$ 。

三、解答题

【参考答案】

将扇形 ADG 与扇形 DBH 拼成一个半圆，则组成的图形中空白部分是一个边长为 10cm 的等腰直角三角形， $S_{\text{阴影}} = S_{\text{半圆}} - S_{\text{三角形}}$ 。

$20 \div 2 = 10$ (厘米)

$S_{\text{阴影}} = \frac{1}{2} \times 3.14 \times 10^2 - 10 \times 10 \div 2 = 107$ (平方厘米)

答：图中的阴影部分面积是 107 平方厘米。

第十一周

一、选择题

1. D 【解析】集合 $N = \{0, 2, 4\}$ ， $\therefore M \cap N = \{0, 2\}$ 。

2. D 【解析】由正弦定理得， $\frac{a}{\sin A} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin B}$ ， $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，又 $b > a$ ， $\therefore B$ 可能是锐角，也可能是钝角，故 $B = 60^\circ$ 或 120° 。

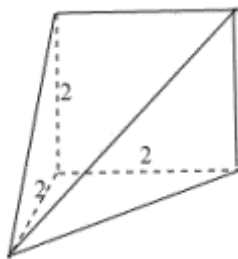
3. C 【解析】 $\because x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ， $\therefore \sin x = \frac{4}{5}$ ， $\cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = -\frac{4}{5}$ 。

4. D 【解析】 $\because 0 < a = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ ， $b = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1$ ， $c = \log_{\frac{1}{5}} 10 < \log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$ ，

$\therefore$ 大小关系为 $b > a > c$ 。

5. D 【解析】由三视图可知几何体为四棱锥，其直观图如图，该四棱锥的高为 2，底面正方

形的边长为 2, $\therefore$ 几何体的体积 $V = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 2 = \frac{8}{3}$. 可知, 选项 D 符合题意.



6. A 【解析】由频率分布直方图可知, 测试成绩在区间 $[50, 60)$ 的频率为 $0.01 \times 10 = 0.1$, 又由茎叶图可知, 测试成绩在区间 $[50, 60)$ 的频数为 2, $\therefore$ 参加体能测试的人数 $n = \frac{2}{0.1} = 20$, 又由茎叶图可知, 测试成绩在区间 $[80, 90)$, $[90, 100]$ 的频数为 $20 - 14 = 6$, $\therefore$ 测试成绩在区间 $[80, 90)$, $[90, 100]$ 的频率为 $\frac{6}{20} = 0.3$, 又由频率分布直方图可知, 测试成绩在区间 $[80, 90)$, $[90, 100]$ 的频率为 $(a + 0.01) \times 10 = 0.3$, 解得 $a = 0.02$.

7. D 【解析】用 $x + 2$ 代替原式中点的 x , 则原式可化为 $f(x + 3) = -f(x + 1) = f(x - 1)$, 则 $f(x)$ 的周期为 4. 所以 $f(322) = f(2) = f(-2) = 3$.

8. A 【解析】易知正三棱锥 $A-BCD$ 中对棱互相垂直, 则有 $AC \perp BD$, 因为 $\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QB}$, 所以 $PQ \parallel AC$, 而 $DP \perp PQ$, 所以 $DP \perp AC$, 又 $DP \cap BD = D$, 所以 $AC \perp$ 平面 ABD , 又因为该三棱锥是正三棱锥, 所以正三棱锥 $A-BCD$ 的三条侧棱相等且互相垂直, 将正三棱锥 $A-BCD$ 补成一个正方体, 则正方体的体对角线就是其外接球的直径, 故 $2R = \sqrt{3}$, 由正方体的性质可知正方体的体对角线长度的 $\frac{1}{3}$ 即为该正三棱锥的高, 所以正三棱锥的高为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

二、判断题

1. $\checkmark$ 【解析】 $a = 0.2^{-0.3} > 0.2^0 = 1$, $0 = \log_{0.2} 1 < b = \log_{0.2} 0.3 < \log_{0.2} 0.2 = 1$, $c = \log_2 0.3 < \log_2 1 = 0$, 因此 $a > b > c$.

2. $\times$ 【解析】充分性: 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 根据根与系数的关系可知, 两根之积 $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, 若 $ac < 0$, 则 $x_1 x_2 < 0$, 故一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 是常数且 $a \neq 0$) 有一正实根和一负实根; 必要性: 若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不同实根, 根据根与系数关系可知两根之积不一定为负, 即必要性不具备.

3. √ 【解析】因为角 α 的终边经过点 $P(-\sqrt{3}, m)$, $m \neq 0$, 且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}m}{4}$, 所以

$$\frac{m}{\sqrt{3+m^2}} = \frac{\sqrt{2}m}{4}, \text{ 解得 } m = \pm\sqrt{5}, \text{ 所以 } \cos \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3+m^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

4. × 【解析】因为 $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, $\overline{AD} + \overline{BA} = \overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BD}$, 而在矩形 $ABCD$ 中, $\overline{AC} = \overline{BD}$ 不成立, 故命题错误.

5. √ 【解析】因为 $a_n = \frac{3n}{4n+2}$, 所以 $a_{n+1} - a_n = \frac{3n+3}{4n+6} - \frac{3n}{4n+2} = \frac{6}{(4n+6)(4n+2)} > 0$,

$\therefore a_{n+1} > a_n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

6. √ 【解析】因为直线 $b \perp$ 平面 α , 所以直线 b 垂直于平面内的所有直线, 因为直线 $a \parallel$ 平面 α , 由线面平行的性质可得平面内必有一条直线与 a 平行, 所以直线 b 垂直于平面内与直线 a 平行的直线, 必与直线 a 垂直, 故正确.

7. × 【解析】当 $A=0, B \neq 0$ 时, 例如 $A=0, B=1, C=5$, 则 $Ax + By + C = 0$ 整理为 $y + 5 = 0$, 即 $y = -5$, 此时方程表示的直线是与 x 轴平行的直线, 且该直线的斜率为 0. 所以当 $A=0, B \neq 0$ 时, 方程表示斜率不存在的直线说法错误.

8. √ 【解析】根据题意, 则甲、乙各投篮一次, 两人都没有命中的概率 $P_1 = \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}$,

则至少有一人命中的概率 $P = 1 - P_1 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

三、解答题

【参考答案】

(1) $f(x)$ 在 R 上单调递增, 证明如下:

任取 $x_1, x_2 \in R$, 且 $x_1 > x_2$,

$$\text{故 } f[(x_1 - x_2) + x_2] - f(x_2) = (f(x_1 - x_2) + f(x_2) - 1) - f(x_2)$$

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) - 1,$$

因为 $x_1 > x_2$, 所以 $x_1 - x_2 > 0$, $f(x_1 - x_2) > 1$,

$$\text{即 } f(x_1) - f(x_2) > 0, f(x_1) > f(x_2),$$

所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

$$(2) f(3x^2 - 4x - 2) + 2f(x) > 4$$

$$f(3x^2 - 4x - 2) + f(x) - 1 > -f(x) + 3$$

$$f(3x^2 - 3x - 2) > -f(x) + 3$$

$$f(3x^2 - 3x - 2) + f(x) - 1 > 2$$

$$f(3x^2 - 2x - 2) > 2 = f(-1)$$

因为 $f(x)$ 在 R 上单调递增, 所以 $3x^2 - 2x - 2 > -1$, 整理得 $(x-1)(3x+1) > 0$,

解得 $x < -\frac{1}{3}$ 或 $x > 1$,

所以不等式的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$.

第十二周

一、选择题

1. B 【解析】 $z = i(m+i) = -1 + mi$, 则 $|z| = \sqrt{1+m^2}$, 若 $|z| > 2$, 即 $\sqrt{1+m^2} > 2$, 解得 $m > \sqrt{3}$ 或 $m < -\sqrt{3}$, 所以 “ $|z| > 2$ ” 是 “ $m > 2$ ” 的必要不充分条件.

2. A 【解析】 从红、黄、白、紫四种颜色的花中任选 2 种花种在一个花坛中共有 $C_4^2 = 6$ 种,

其中选中的花种没有红色的共有 $C_3^2 = 3$ 种, 故其概率为 $\frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{2}$.

3. B 【解析】 第一次循环, $S = 1^2 = 1$, $k = 2$; 第二次循环, $S = 2 \times 1 + 2^2 = 6$, $k = 3$; 第三次循环, $S = 2 \times 6 + 3^2 = 21$, $k = 4$; 第四次循环, $S = 2 \times 21 + 4^2 = 58$, $k = 5$, 最后输出的数据为 58. 故判断框应填入 $k \leq 4$.

4. C 【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = f(0) = 0$, $\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\therefore x = 0$ 间断.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} x = f(1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2 - x = 1$, $\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$, $\therefore x = 1$ 连续.

5. B【解析】抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 $(1, 0)$, 双曲线的渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 因此 $\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$b = \sqrt{3}$, 虚轴 $2b = 2\sqrt{3}$.

6. C【解析】由题意得, $f(x) = x^4 + (a+1)x^3 + (a+b-2)x^2 + (b-2a)x - 2b$,

$f(x)$ 是偶函数, 则 $\begin{cases} a+1=0 \\ b-2a=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$,

即 $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$, $x^2 = \frac{5}{2}$ 时, $f(x)_{\min} = -\frac{9}{4}$.

7. A【解析】由 $|AB| = \sqrt{2}$ 可知 $\angle AOB = 90^\circ$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, M 是 AB 的中点, 则 $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$, $\vec{OC} \cdot \vec{OM} = (2\vec{OA} - \vec{OB}) \cdot \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{2}(2\vec{OA}^2 - \vec{OB}^2) = \frac{1}{2}(2 \times 1 - 1) = \frac{1}{2}$.

8. B【解析】由题意得, $\therefore$ 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{16}$ 对称, 且 $f\left(-\frac{\pi}{16}\right) = 0$, $\therefore$ 周期 T 最大值为 $4 \times \left[\frac{\pi}{16} - \left(-\frac{\pi}{16}\right)\right] = \frac{\pi}{2}$, $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$, 此时, 如取 $x_0 = -\frac{3\pi}{16}$, 则 $f(x_0)$ 是最小值, $f\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right)$

是最大值, 满足对任意的 x 都有 $f(x_0) \leq f(x) \leq f\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right)$.

二、填空题

1. -18 或 6【解析】(1) 当 $a > 0$ 时, $\begin{cases} b-a=-7 \\ b+a=1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} b=-3 \\ a=4 \end{cases}$, 此时 $3a+2b=6$; (2) 当

$a < 0$ 时, $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=-7 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} b=-3 \\ a=-4 \end{cases}$, 此时 $3a+2b=-18$. 所以 $3a+2b$ 的值为 -18 或 6.

2. -11【解析】由题方程 $ax^2 - bx - 1 \geq 0$ 的解为 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = \frac{1}{2}$, 则由韦达定理有:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{a} = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=-5 \end{cases}, \text{ 故 } a+b=-11.$$

3. $\frac{3}{4}$ 【解析】 $\sin A = \sin 2B$, $\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos B = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos B = \frac{3}{4}$.

4. $>$; 2【解析】 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \sqrt{2}$, $f(1) = -1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1)$. 由零点定理得, 令 $n=2$, 则

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \sqrt{2} > 0$, 而 $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2} - 2^{\frac{2}{3}}$, 又 $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} < \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 4$, 故 $f\left(\frac{2}{3}\right) < 0$, 故 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right)$ 上存在零点, 此时 $n = 2$.

5. 250 【解析】依据频率分布表可知成绩在 $[300, 350)$ 之间的频率为 $0.005 \times 50 = 0.25$, 所以频数为 $1000 \times 0.25 = 250$ (人).

6. $-\frac{1}{2}$ 【解析】 $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -f\left(\frac{5}{2}\right) = -f\left(2 + \frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

7. ①②③ 【解析】对于①, $\because f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, $\therefore f(0) = 0$, 则 $f(2) = -f(0) = 0$;

对于②, $\because f(x-2) = -f(x)$, $\therefore f(x-4) = -f(x-2) = -[-f(x)] = f(x)$, 即周期为 4; 对于③,

$\because f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$, 又 $f(x-2) = -f(x)$, $\therefore f(x+2) = f(-x)$;

对于④, $\because f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, $\therefore f(x)$ 的图象关于原点 $(0, 0)$ 对称. 综上, 正确的序号为①②③.

8. 3 【解析】由定义在 R 上的函数 $f(x)$ 是奇函数且满足 $f\left(\frac{3}{2} - x\right) = f(x)$ 可知,

$$f\left(x - \frac{3}{2}\right) = f\left[-\left(\frac{3}{2} - x\right)\right] = -f\left(\frac{3}{2} - x\right) = -f(x),$$

$$\therefore f(x-3) = f\left[\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}\right] = -f\left(x - \frac{3}{2}\right) = -(-f(x)) = f(x), \therefore f(x) \text{ 的周期为 } 3,$$

由 $\frac{S_n}{n} = 2 \times \frac{a_n}{n} + 1$ 得, $S_n = 2a_n + n$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n + n - 2a_{n-1} - (n-1)$,

$$\therefore a_n = 2a_{n-1} - 1, \text{ 又 } \because a_1 = -1, \therefore a_2 = -3, a_3 = -7, a_4 = -15, a_5 = -31, a_6 = -63,$$

$$\therefore f(a_5) + f(a_6) = f(-31) + f(-63) = -f(3 \times 10 + 1) - f(3 \times 21 + 0) = -f(1) - f(0) = -f(1-3) - 0$$

$$= -f(-2) = 3.$$

三、解答题

【参考答案】

(1) 证明: $\because DE$ 与 O 相切,

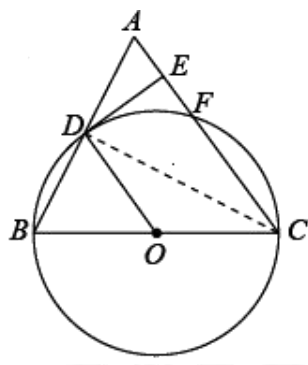
$$\therefore DE \perp OD, \therefore \angle ODE = 90^\circ, \because BC = AC, \therefore \angle A = \angle CBA,$$

$$\therefore OD = OB, \therefore \angle ODB = \angle CBA,$$

$\therefore \angle ODB = \angle A$, $\therefore OD \parallel AC$, $\therefore \angle AED = \angle ODE = 90^\circ$,

$\therefore DE \perp AC$.

(2) 如图, 连接 CD ,



$\because BC$ 是 O 的直径, $\therefore \angle BDC = 90^\circ$, $\therefore \angle ADC = 90^\circ$,

$\because O$ 的半径为 4, $\therefore BC = AC = 8$, $\because DE \perp AC$, $\therefore \angle AED = \angle DEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle A + \angle ADE = 90^\circ$, $\because \angle EDC + \angle ADE = 90^\circ$, $\therefore \angle EDC = \angle A$,

$\therefore \triangle AED \sim \triangle DEC$, $\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{DE}{EC}$,

设 $AE = x$, 则 $\frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{8-x}$, 解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ (舍去),

$\therefore AE = 2$.

第十三周

一、选择题

1. C 【解析】 $z = (1+i)(2+i) + 1 = 1 + 3i + 1 = 2 + 3i$.

2. B 【解析】 由 $3^a = 4^b = m$ 得, $a = \log_3 m$, $b = \log_4 m$, $\therefore \frac{1}{a} = \log_m 3$, $\frac{1}{b} = \log_m 4$,

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_m 3 + \log_m 4 = \log_m 12 = 2$, $\therefore m^2 = 12$, 即 $m = 2\sqrt{3}$.

3. C 【解析】 由题意得, $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} = 2$, 解得 $x = 5$, $\therefore f(2) = 5$.

4. D 【解析】 $\because y' = -2\sin 2x$, $\therefore$ 所求切线的斜率为 $y' = -2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = -2$, $\therefore$ 所求切线为

$$y = -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ 即 } 4x + 2y - \pi = 0.$$

5. D 【解析】令 $t = 2x + 1$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 则 $0 < t < 1$, $\therefore y = \log_{(a^2-1)}(2x+1)$ 在区间 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

内恒有 $y > 0$, $\therefore 0 < a^2 - 1 < 1$, 即 $1 < a^2 < 2$, 解得 $-\sqrt{2} < a < -1$ 或 $1 < a < \sqrt{2}$.

6. C 【解析】 $\because f(x) = x + \frac{4}{x} - 3$, $x \in (0, 4)$, $\therefore x = 2$ 时, 函数取得最小值 1, $\therefore a = 2$, $b = 1$,

$$\therefore g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^{|x-b|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}, & x \geq 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}, & x < 1 \end{cases}, \therefore \text{函数图象关于直线 } x=1 \text{ 对称, 在 } (-\infty, 1) \text{ 上为}$$

增函数, 在 $(1, +\infty)$ 为减函数.

7. A 【解析】根据频率分布直方图, 该市在 $[25, 30)$ 的频率为 $1 - [(0.01 + 0.07 + 0.06 + 0.02) \times 5] = 0.2$, $\therefore$ 估计该市在 $[25, 30)$ 的人数是 $0.2 \times 2500 = 500$ 人.

8. A 【解析】语文与生物要相邻, 将语文与生物捆绑看作一个整体, 数学与物理不能相邻, 采用插空法. 第一步, 将语文与生物捆绑看作一个整体, 语文与生物的排列种类为 A_2^2 ; 第二步, 语文与生物这个整体与英语、化学共 3 个, 排列种类为 A_3^3 ; 第三步, 第二步完成后共有 4 个位置, 将物理和数学排好, 排列种类为 A_4^2 . 所以排列顺序共有 $A_2^2 \cdot A_3^3 \cdot A_4^2 = 144$ 种.

二、填空题

1. p 且 q ; 非 p ; p 或 q ; p 且 q 【解析】对于①, “菱形的对角线互相垂直平分”是 p 且 q 的形式; 对于②, “负数没有平方根”是非 p 形式; 对于③, “ $3 \geq 3$ ”是“ $3 > 3$ 或 $3 = 3$ ”, 是 p 或 q 形式; 对于④, “ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形”是“ $\triangle ABC$ 等腰三角形且 $\triangle ABC$ 是直角三角形”, 是 p 且 q 形式.

2. 2000 【解析】由题意可知, 若该家电大于 200 但不超过 500 元,

优惠的钱数最多为 $(500 - 200) \times (1 - 0.9) = 30$ 元, 因为该家电优惠 330 元,

所以该家电一定超过 500 元, 设该家电在商场的标价为 x 元,

则优惠钱数为 $300 \times (1 - 0.9) + (x - 500) \times (1 - 0.8) = 330$, 解得 $x = 2000$.

所以, 若某人来该商场购买一件家用电器共节省 330 元, 则该件家电在商场标价为 2000 元.

$$3. \frac{1}{2} < x < 2 \quad \text{【解析】} \begin{cases} 2-x > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 2.$$

$$4. \frac{1}{2} \quad \text{【解析】} \frac{a-i}{2+i} = \frac{(a-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2a-1}{5} + \frac{-2-a}{5}i,$$

$\therefore$ 复数 $\frac{a-i}{2+i}$ 是纯虚数,

$$\therefore \begin{cases} \frac{2a-1}{5} = 0 \\ \frac{-2-a}{5} \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a = \frac{1}{2}.$$

$$5. 45 \quad \text{【解析】} \because E(\xi) = 60p = 15, \therefore p = \frac{1}{4},$$

$$\therefore D(\xi) = 60 \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{45}{4}, \quad D(2\xi + 1) = 2^2 D(\xi) = 45.$$

$$6. -2 \quad \text{【解析】} \text{ 由于 } f(x) \text{ 是奇函数, } f(-2) = -f(2), \text{ 由题意图可知, } f(-2) = -f(2) = -2.$$

$$7. (-9, -5) \quad \text{【解析】} \text{ 构造二次函数 } f(x) = 2x^2 - 3x + m, \text{ 由二次函数 } f(x) \text{ 的图象特征得,}$$

$$\begin{cases} f(-2) \cdot f(-1) < 0 \\ f(2) \cdot f(3) < 0 \end{cases}, \text{ 解得 } -9 < m < -5, \text{ 故 } m \text{ 的取值范围是 } (-9, -5).$$

$$8. 2 \quad \text{【解析】} \text{ 原方程可化为 } (3^x)^2 - (4+a) \cdot 3^x + 4 = 0, \therefore 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 4,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 2 \log_3 2, \text{ 又 } (x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2, \therefore x_1x_2 \leq (\log_3 2)^2,$$

$$\therefore \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{4(\log_3 2)^2}{x_1x_2} - 2 \geq 2.$$

三、解答题

【参考答案】

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $a = 2\sqrt{2}$, $b = 5$, $c = \sqrt{13}$ 及余弦定理得,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{8 + 25 - 13}{2 \times 2\sqrt{2} \times 5} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

又因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $C = \frac{\pi}{4}$, $a = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{13}$ 及正弦定理, 可得

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

由 $a < c$ 知角 A 为锐角, 由 $\sin A = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, 可得 $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,

进而 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{12}{13}$, $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = \frac{5}{13}$,

所以 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2A \sin \frac{\pi}{4} = \frac{12}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$.

第十四周

一、选择题

1. C 【解析】 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}$.
2. D 【解析】由指数函数和对数函数的图象可以得到, $0 < a < 1$, $b < 0$, $c > 1$, $\therefore b < a < c$.
3. D 【解析】由题意得, 点 A , B 在直线 $ax + y + 1 = 0$ 的两侧, 或其中某个点在直线上,
 $\therefore (2a + 3 + 1)(-3a + 2 + 1) \leq 0 \Rightarrow a \geq 1$ 或 $a \leq -2$, 即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.
4. B 【解析】当 $n = 1$, $a_1 = S_1 = p - 1$; 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = pn^2 - n - [p(n-1)^2 - (n-1)] = 2np - p - 1$, $n = 1$ 满足, 故该数列是等差数列, $a_3 = 6p - p - 1 = 4$, 解得 $p = 1$.
5. C 【解析】由积分运算法则, 得 $\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$, 因此, 不等式 $a > \int_1^e \frac{1}{x} dx$,
 即 $a > 1$, 对应的集合是 $(1, +\infty)$, 将此范围与各个选项加以比较, 只有选项 C 对应集合 $(e, +\infty)$
 是 $(1, +\infty)$ 的子集, 所以原不等式成立的一个充分而不必要的条件是 $a > e$.
6. B 【解析】由 $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-4, -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-5, -3)$, 那么 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} =$
 $(1, 2) + (-4, -1) + (-5, -3) = (-8, -2) = 2(-4, -1)$, $\therefore \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行,
 $\therefore ABCD$ 是四边形, $\therefore AD \parallel BC$, 又 $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{68}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} =$
 $\sqrt{17}$, $|\overrightarrow{AD}| \neq |\overrightarrow{BC}|$, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是梯形.
7. C 【解析】 $\because \vec{a} \parallel \vec{b}$, $\therefore 2k - (-1) = 0$, $\therefore k = -\frac{1}{2}$.

8. B【解析】根据系统抽样的方法可得，抽取的学生的学号成等差数列，且公差为 $\left[\frac{54}{4}\right]=13$ ，

已知 3 号、29 号、42 号的同学在样本中，那么样本中还有一个同学的学号是 $3+13=16$ 。

二、填空题

1. $3+2\sqrt{2}$ 【解析】函数过点 $(0,1)$ ， $1=2a+b$ 代入 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2a+b}{a}+\frac{2a+b}{b}=3+\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}\geq 3+$

$$2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}\geq 3+2\sqrt{2}.$$

2. $\left(-\frac{12}{5}, -\frac{3}{2}\right)$ 【解析】由 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=3n-6$ ，且 $a_2=\frac{1}{2}a_1$ 得， $a_3=-3-\frac{3}{2}a_1$ ，

$\therefore a_4=a_1+3$ ，由 $\{a_n\}$ 是单调递增数列知， $a_4>a_3>a_2>a_1$ ，即 $a_1+3>-3-\frac{3}{2}a_1>\frac{1}{2}a_1>a_1$ ，

解得 $-\frac{12}{5}<a_1<-\frac{3}{2}$ 。

3. $2; 2^{n+1}-2$ 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ， $\therefore a_2+a_4=20$ ， $a_3+a_5=40$ ，

$$\therefore \begin{cases} a_1q+a_1q^3=20 \\ a_1q^2+a_1q^4=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=2 \\ q=2 \end{cases}, \therefore S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{2\times(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2.$$

4. $-e$ 【解析】对曲线可有 $y'=\ln x+1$ 且 $x>0$ ，设切点为 (a, b) ，则有 $b=2a+m$ ， $b=a\ln a$ ，

$\ln a+1=2$ ，因此 $a=e$ ， $b=e$ ， $m=-e$ 。

5. $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ 【解析】 $x>0$ 时， $f(x)$ 为增函数，又 $f(x)$ 为偶函数，先观察 $x>0$ 时， $f(x)$ 的

零点情况。 $f(1)=1>0$ ， $f\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}-1<0$ ，由 $f(1)\cdot f\left(\frac{1}{e}\right)<0$ 知， $x>0$ 时， $f(x)$ 的零点

在区间 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 内，又 $f(x)$ 是偶函数，所以另一零点在区间 $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ 内。则 $f(x)$ 的零点不可能

在区间 $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ 内。

6. $2^x>x^{\frac{1}{2}}>\lg x$ 【解析】 $\therefore 0<x<1$ ， $\therefore 2^x>2^0=1$ ， $\lg x<\lg 1=0$ ， $0=0^{\frac{1}{2}}<x^{\frac{1}{2}}<1^{\frac{1}{2}}=1$ ，

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时， $2^x>x^{\frac{1}{2}}>\lg x$ 。

7. $3x+y+1=0$ 【解析】由于函数 $y=a^x$ 经过定点 $(0,1)$ ， $\therefore$ 函数 $f(x)=a^{x+1}+1$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)

的图象恒过定点 $A(-1,2)$ ，再由点 A 在直线 $l: bx+y+1=0$ 上可得， $-b+2+1=0$ ，故 $b=3$ ，

故直线 l 的方程是 $3x + y + 1 = 0$.

8. -1 【解析】 $\because y = f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \log_2 x$,

$$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2, \therefore f\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right) = f(-2) = -f(2) = -1.$$

三、解答题

【参考答案】

令 $\sqrt{x} = t (t \geq 0)$, 则 $x = t^2$, $dx = 2tdt$

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = \int_0^2 \frac{t}{1+t} 2tdt = 2 \int_0^2 \frac{t^2}{1+t} dt = 2 \int_0^2 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= 2 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t| \right) \Big|_0^2 = 2 \ln 3.$$

第十五周

一、选择题

1. B 【解析】由题意可得, $M = \{x | x - 1 \geq 0\} = \{x | x \geq 1\}$, $N = \{x | 2 - x > 0\} = \{x | x < 2\}$, $\therefore M \cap N = \{x | 1 \leq x < 2\} = [1, 2)$, $\therefore \complement_R(M \cap N) = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$.

2. C 【解析】 $\because f(x) = x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$, 对称轴为 $x = 2$ 且在对称轴左边递减, 又 $\because \sin x \in [-1, 1]$ 在对称轴的左边, $\therefore f(\sin x)$ 的最小值为 $f(1) = 1 - 4 = -3$.

3. D 【解析】 $\because f(x + 4) = f(x)$, $\therefore f(2013) = f(1)$, $\because f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, $f(-1) = 2$, $\therefore f(1) = -f(-1) = -2$, $\therefore f(2013) = -2$.

4. B 【解析】令 $t = 6x - x^2 - 5$, 由 $t > 0$ 可得, $1 < x < 5$, $\therefore t$ 在 $(1, 3)$ 上是增函数, 又 $\because y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 根据复合函数的单调性可知, 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(6x - x^2 - 5)$ 的单调递减区间是 $(1, 3)$.

5. A 【解析】由题意得, $f(2)=\frac{1}{4}$, $f(x+2)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, $f(4)=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$, $f(6)=\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}=\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{4}$, $f(8)=\frac{3}{5}$, $f(10)=\frac{1}{4}$, ...即偶数中4的倍数对应的值为 $\frac{3}{5}$, 不是4的倍数对应的值为

$\frac{1}{4}$. $\because 2010$ 不能被4整除, $\therefore f(2010)=\frac{1}{4}$.

6. A 【解析】选项A中, $\because A=\{x|0\leq x\leq 6\}$, $0\leq \frac{1}{2}x\leq 3$; 而当 $x=6$ 时, $3\notin[0,2]$,

$\therefore f: x\rightarrow y=\frac{1}{2}x$, 从A到B对应法则 f 不是映射.

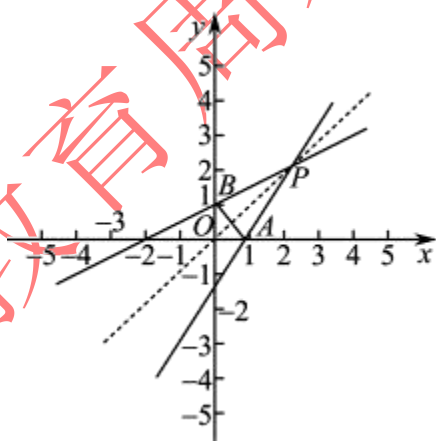
7. A 【解析】由于函数 $g(x)$ 在定义域 $[-1,2]$ 内是任意取值的, 且必存在 $x_0\in[-1,2]$ 使得 $g(x_1)$

$=f(x_0)$, 因此问题等价于函数 $g(x)$ 的值域是函数 $f(x)$ 值域的子集. 因为函数 $f(x)$ 的值域是

$[-1,3]$, 函数 $g(x)$ 的值域是 $[2-a, 2+2a]$, 则有 $2-a\geq -1$ 且 $2+2a\leq 3$, 即 $a\leq \frac{1}{2}$, 又 $a>0$,

故 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

8. B 【解析】根据题意画出图形, 如图:



由于互为反函数的两个函数的图象关于 $y=x$ 对称,

所以这两个函数的图象交于 P 点必在直线 $y=x$ 上,

且 A, B 两点关于 $y=x$ 对称, $\therefore AB\perp OP$,

$\therefore$ 四边形 $OAPB$ 的面积 $=\frac{1}{2}AB\times OP=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times OP=3$,

$\therefore OP=3\sqrt{2}$, $\therefore P\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$, $\therefore P(3, 3)$,

代入 $f(x) = k(x-1)$ 得 $3 = k(3-1)$, $k = \frac{3}{2}$ 满足题意.

二、填空题

1. $(0, 1)$ 【解析】根据幂函数的性质, $\therefore \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\therefore$ 当 $0 < x < 1$ 时, $x^{\frac{2}{3}} < x^{\frac{1}{2}}$; 当 $x > 1$ 时,

$x^{\frac{2}{3}} > x^{\frac{1}{2}}$. $\therefore f(x) < 0$ 的取值范围是 $(0, 1)$.

2. -1 【解析】令 $g(x) = \sin x - 2x + x^3$, 则得 $g(x)$ 的定义域为 R , 显然关于原点对称,

又 $g(-x) = \sin(-x) - 2(-x) + (-x)^3 = -(\sin x - 2x + x^3) = -g(x)$, 所以 $g(-m) = -g(m)$,

又 $f(x) = \sin x - 2x + x^3 + 1 = g(x) + 1$, 所以 $f(m) = 3 = g(m) + 1$, 则 $g(m) = 2$,

所以 $f(-m) = g(-m) + 1 = -g(m) + 1 = -1$.

3. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】 $\therefore$ 函数 $f(x) = \cos x$, $\therefore f'(x) = -\sin x$, $\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $4 + 2\sqrt{3}$ 【解析】设 $P(\cos \theta, 2 \sin \theta)$, 则 $F_1(0, -\sqrt{3})$, $O(0, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PO} = \cos^2 \theta + 2 \sin \theta (\sqrt{3} + 2 \sin \theta) = (\sqrt{3} \sin \theta + 1)^2$,

$\therefore \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PO}$ 的最大值为 $(\sqrt{3} + 1)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$.

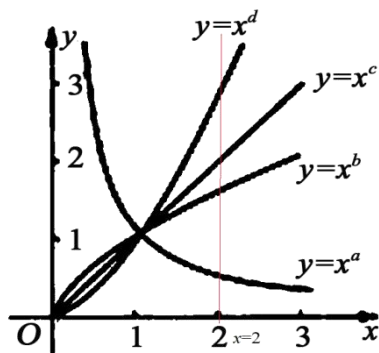
5. $1 \leq m \leq 3$ 【解析】函数的定义域 $(1, 7)$,

$\therefore f(x) = \lg(-x^2 + 8x - 7)$ 在 $(m, m+1)$ 上是增函数,

由复合函数的单调性可知 $t = -x^2 + 8x - 7$ 在 $(m, m+1)$ 上单调递增且 $t > 0$,

函数的增区间 $(1, 4]$, 减区间 $[4, 7)$, $\begin{cases} m \geq 1 \\ m+1 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq m \leq 3$.

6. $d > c > b > a$ 【解析】作出直线 $x=2$ ，可得 $2^d > 2^c > 2^b > 2^a$ ， $\therefore d > c > b > a$ 。



7. 1 【解析】在三棱锥 $P-ABC$ 中，

$\because PA \perp$ 底面 ABC ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\therefore AB \perp$ 平面 APC ，

$\because EF \subset$ 平面 PAC ， $\therefore EF \perp AB$ ，

$\because EF \perp BC$ ， $\therefore EF \perp$ 底面 ABC ， $\therefore PA \parallel EF$ ，

$\because F$ 是 AC 的中点， E 是 PC 上的点， $\therefore E$ 是 PC 的中点，

$$\therefore \frac{PE}{EC} = 1.$$

8. 8 【解析】过 P 作 $PQ \perp x$ 轴，如图所示，

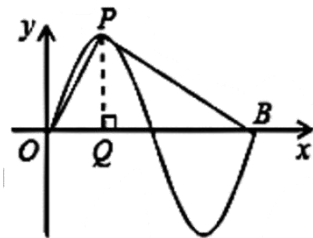
$\because$ 函数 $y = \sin \pi x$ ，且 P 是图象的最高点， B 是图象与 x 轴的交点，

$$\therefore P\left(\frac{1}{2}, 1\right), B(2, 0), \text{ 即 } |PQ| = 1, |OQ| = \frac{1}{2}, |OB| = 2,$$

$$\therefore |QB| = |OB| - |OQ| = \frac{3}{2}, \text{ 在 } Rt \triangle OPQ \text{ 中, } \tan \angle OPQ = \frac{|OQ|}{|PQ|} = \frac{1}{2},$$

$$\text{在 } Rt \triangle PQB \text{ 中, } \tan \angle BPQ = \frac{|BQ|}{|PQ|} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \tan \angle OPB = \tan(\angle OPQ + \angle BPQ) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}} = 8.$$



三、解答题

【参考答案】

(1) 根据题意知， $\frac{a_{n+1}}{2n+1} = \frac{a_n}{2n-1}$ ，故数列 $\left\{\frac{a_n}{2n-1}\right\}$ 是首项为 1，公比为 1 的等比数列，

$$\frac{a_n}{2n-1} = 1, \text{ 所以 } a_n = 2n-1 (n \in N^*).$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } & \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

第十六周

一、选择题

1. B 【解析】根据题意，满足题意的子集有 $\{3\}$ ， $\{1, 5\}$ ， $\{2, 4\}$ ， $\{3, 1, 5\}$ ， $\{3, 2, 4\}$ ， $\{3, 1, 5, 2, 4\}$ ， $\{1, 5, 2, 4\}$ 共 7 个。

2. B 【解析】 $\because a = b = \frac{2}{3}$ 时， $a + b > 1$ ， $\therefore$ ①不可推； $\because a = b = 1$ 时， $a + b = 2$ ， $\therefore$ ②不可推；假设 a, b 都不大于 1， $a \leq 1, b \leq 1 \Rightarrow a + b \leq 2$ 与 $a + b > 2$ 矛盾， $\therefore$ ③可推； $\because a = b = -2$ 时， $a^2 + b^2 > 2$ ， $\therefore$ ④不可推；假设 a, b 都不大于 1， $a \leq 1, b \leq 1 \Rightarrow a^3 \leq 1, b^3 \leq 1 \Rightarrow a^3 + b^3 \leq 2$ 与 $a^3 + b^3 > 2$ 矛盾， $\therefore$ ⑤可推； $\because a = -2, b = -1$ 时， $ab = 2 > 1$ ， $\therefore$ ⑥不可推。

3. D 【解析】 $\because x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1$ ，故不存在 $x \in R, x^2 + 2x + 2 \leq 0$ ，原命题为假命题；根据圆内接四边形的定义，可得任意一个四边形的四个顶点共圆为假命题；所有能被 3 整除的整数都是奇数，如整数 6，它是偶数，原命题为假命题； $\forall x \in R, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 正确，所以选项 D 的否定是假命题。

4. D 【解析】 $y' = 4x^3$ ，当 $x = 1$ 时， $y' = 4$ ，则 $\tan \alpha = 4$ ，

$$\text{所以 } \cos^2 \alpha - \sin 2\alpha = \frac{\cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - 2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{7}{17}.$$

5. A 【解析】 $\because f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，则 $f(0) = 0$ 。又 $\because y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{3}$ 对称， $f\left(\frac{2}{3}\right) = f(0) = 0$ ， $\therefore f\left(-\frac{2}{3}\right) = -f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ 。

6. C【解析】 $\because f(x) = 2ax^2 - ax + 1 (a < 0)$ 的对称轴 $x = \frac{1}{4}$, 开口向下, 又 $\because x_1 < x_2$, $x_1 + x_2 = 0$,

$\therefore x_1 < 0 < x_2$, 且 $x_2 = -x_1$, 则 x_1 距离对称轴 $x = \frac{1}{4}$ 较远, 根据开口向下的二次函数性质可知,

$f(x_1) < f(x_2)$.

7. C【解析】若 $a^b > 1$, 则 $a > 1, b > 0$ 或 $0 < a < 1, b < 0$, $\therefore (a-1)b > 0$; 若 $(a-1)b > 0$,

则 $a > 1, b > 0$ 或 $0 < a < 1, b < 0$, 所以 $a^b > 1$. 综上, $a^b > 1$ 是 $(a-1)b > 0$ 的充要条件.

8. C【解析】抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 等边三角形的一个顶点位于抛物线

$y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 另外两个顶点在抛物线上, 则等边三角形关于 x 轴轴对称, 两个边

的斜率 $k = \pm \tan 30^\circ = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 其方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{p}{2}\right)$, 每条直线与抛物线均有两个交点,

焦点两侧的两交点连接, 分别构成一个等边三角形. 故这样的正三角形有 2 个.

二、判断题

1. $\times$ 【解析】设原来的盐水有 x 克,

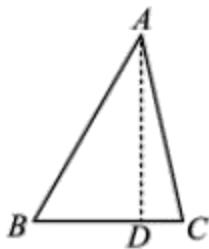
则加入 6 克盐和 14 克水后的含盐率为 $\frac{30\%x + 6}{x + 6 + 14} = \frac{30\%(x + 20)}{x + 20} = 30\%$, 盐水含盐率不变.

2. $\times$ 【解析】长方形的周长为 60cm, 那么一组长 + 宽为 $60 \div 2 = 30$ cm. 因为长、宽均为质数, 所以长、宽可以是: 7cm 和 23cm, 11cm 和 19cm, 13cm 和 17cm. 所以长方形面积为:

$7 \times 23 = 161\text{cm}^2$, $11 \times 19 = 209\text{cm}^2$, $13 \times 17 = 221\text{cm}^2$. 所以原题说法不正确.

3. $\times$ 【解析】在 $Rt\triangle ADB$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, $AD = 6\sqrt{3}$, $\therefore BD = \frac{AD}{\tan 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$,

如图, 当点 C 在点 D 的右边时,



$BC = BD + DC = 6 + 1 = 7$.

如图, 当点 C 在点 D 左边时,



$$BC = BD - CD = 6 - 1 = 5.$$

故 BC 的长为 5 或 7.

4. $\checkmark$ 【解析】因为双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$, 所以 $c = \sqrt{2}a$, 又因为 $c^2 = a^2 + b^2$, 所以 $2a^2 = a^2 + b^2$, 解得 $a = b$, 所以双曲线的一条渐近线为 $y = x$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 所以两条渐近线所成的角等于 $\frac{\pi}{2}$.

5. $\times$ 【解析】由于 $a_{10} - a_1 = 10 = 5 \times 2$, $\{a_n\}$ 从 a_1 至 a_{10} , “+2”或“-2”共 9 次, 所以“+2”共 7 次, “-2”共 2 次, 基本事件的总数有 $C_9^2 = 36$ 种, “每一项与前一项的差为 -2 的项都相邻”的事件有 8 种, 故取到的数列满足每一项与前一项的差为 -2 的项都相邻的概率为 $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

6. $\times$ 【解析】“若 $x^2 = 1$, 则 $x = 1$ 或 $x = -1$ ”的否命题是“若 $x^2 \neq 1$, 则 $x \neq 1$ 且 $x \neq -1$ ”.

7. $\checkmark$ 【解析】底面长 $96 \div 2 \div 4 = 12$ 厘米, 高 $12 - 2 = 10$ 厘米, 体积 $12 \times 12 \times 10 = 1440$ 立方厘米.

8. $\times$ 【解析】由 $\cos \theta + \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 得, $(\cos \theta + \sin \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{5}{9}$,

$$\text{解得 } 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9},$$

$$\therefore (\cos \theta - \sin \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}, \therefore \theta \text{ 为第四象限},$$

$$\therefore \cos \theta > 0, \sin \theta < 0, \therefore \cos \theta - \sin \theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\therefore \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{\sqrt{65}}{9}.$$

三、解答题

【参考答案】

(1) 因为 $A+B=ax^{|a|+4}+bx^3-5x^2+2+x^5-3x^3+4x$,

当 $A+B$ 不含 x^5 项和不含 x^3 项时有 $bx^3-3x^3=0$ 和 $ax^{|a|+4}+x^5=0$,

因为 $(b-3)x^3=0$, $b-3=0$, 所以 $b=3$.

因为 $|a|+4=5$, $|a|=1$,

所以 $a=-1$ 或 $a=1$ (不符合题意),

所以 $a=-1$.

(2) $A-B=(ax^{|a|+4}+bx^3-5x^2+2)-(x^5-3x^3+4x)$

$$=ax^{|a|+4}+bx^3-5x^2+2-x^5+3x^3-4x$$

$$=ax^{|a|+4}-x^5+(b+3)x^3-5x^2-4x+2$$

当 $A-B$ 是一个五次四项式时,

①若 $b+3=0$, 即 $b=-3$,

则 $A-B$ 有 $ax^{|a|+4}$, $-x^5$, $-5x^2$, $-4x$, 2 .

若要 $A-B$ 多项式中含 x^5 , 且共有四个项,

则 $|a|+4=5$, 且 $a \neq 1$, 则 $a=-1$,

若 $b=-3$, 则 $a=-1$ 满足条件;

②当 $b+3 \neq 0$, 即 $b \neq -3$,

则 $A-B$ 有 $ax^{|a|+4}$, $-x^5$, $(b+3)x^3$, $-5x^2$, $-4x$, 2 .

又 $|a|+4 \geq 4$, 且 $A-B$ 共有四个项, 则 $ax^{|a|+4}-x^5=0$,

则 $|a|+4=5$, $|a|=1$, 则 $a=1$ 或 $a=-1$ (不符合题意).

若 $b \neq -3$, 则 $a=1$, 此时 $A-B$ 为不含 x^5 的四项式, 不满足条件.

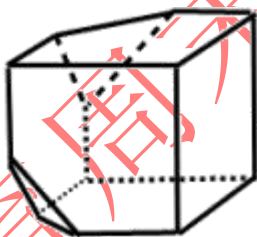
第十七周

一、选择题

1. C 【解析】因为直线 l 的一个方向向量为 $\vec{n}=(-2, 4)$, 所以直线 l 的斜率 $k=\frac{4}{-2}=-2$. 因为直线 l 经过点 $(-1, 4)$, 所以直线 l 的点斜式为 $y-4=-2(x+1)$, 斜截式为 $y=-2x+2$, 截距式为 $x+\frac{y}{2}=1$, 一般式为 $2x+y-2=0$.

2. D 【解析】设 $B=(x, y, z)$, $\because \vec{AB}=-2\vec{a}$, $\therefore (x, y-1, z)=-2(1, 2, 3)$, $\therefore x=-2, y=-3, z=-6$, $\therefore B(-2, -3, -6)$.

3. C 【解析】由题意可知, 一个正方体截去两个角后所得几何体的正(主)视图、俯视图, 则几何体的直观图如图所示, 所以侧视图为选项 C.



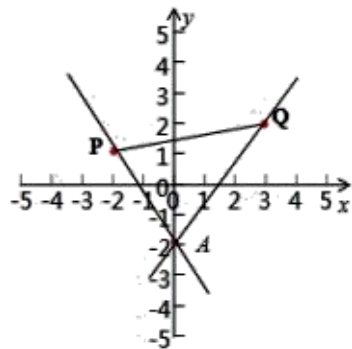
4. A 【解析】 $\because$ 直线 $ax+y+2=0$ 恒过点 $A(0, -2)$,

由题意如图所示,

可知直线 $ax+y+2=0$ 及两点 $P(-2, 1), Q(3, 2)$,

直线与线段 PQ 相交, $k_{AP}=\frac{1+2}{-2-0}=-\frac{3}{2}$, $k_{AQ}=\frac{2+2}{3-0}=\frac{4}{3}$,

$\therefore -a \leq -\frac{3}{2}$ 或 $-a \geq \frac{4}{3}$, $\therefore a \geq \frac{3}{2}$ 或 $a \leq -\frac{4}{3}$.



5. C 【解析】 $\because$ 直线 $ax+by=1$ 与圆 $C: x^2+y^2=1$ 相交,

$\therefore$ 圆心 O 到直线 $ax+by=1$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$, 即 $a^2+b^2>1$,

$\therefore P(a, b)$ 到原点的距离为 $\sqrt{a^2+b^2}>1$, $\therefore$ 点 P 在圆外.

6. B 【解析】圆 $C_1: (x-1)^2+(y-2)^2=1$ 的圆心坐标为 $(1, 2)$, 半径为 1,

圆 $C_2: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$ 的圆心坐标为 $(2, 5)$ ，半径为 3，

则两圆的圆心距为 $3 - 1 < \sqrt{10} < 1 + 3$ ， $\therefore$ 两圆相交， $\therefore$ 两圆公切线的条数为 2 条。

7. D 【解析】由题意得，

$$f(x) = \frac{\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2x^2 + x}{2x^2 + \cos x} = \frac{\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) + 2x^2 + x}{2x^2 + \cos x} = \frac{\cos x - \sin x + 2x^2 + x}{2x^2 + \cos x} =$$

$$1 + \frac{x - \sin x}{2x^2 + \cos x}, \text{ 令 } g(x) = \frac{x - \sin x}{2x^2 + \cos x}, \text{ 则 } f(x) = g(x) + 1, \text{ } g(x) \text{ 是奇函数, 故 } g(x) \text{ 的最大值}$$

与最小值的和等于 0，而函数 $f(x)$ 的最大值 M 与最小值 N 之和等于 2 加上 $g(x)$ 的最大值与

最小值之和，故 $M + N = 2$ 。

8. B 【解析】由题意得，椭圆通径长为 $\frac{1}{2}a$ ，故有 $\frac{2b^2}{a} = \frac{1}{2}a \Rightarrow a^2 = 4b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$ ，故相应

$$\text{双曲线的离心率 } e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

二、填空题

1. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 【解析】由于角 $\frac{\pi}{6}$ 的终边与单位圆的交点的横坐标是 $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore$ 角 $\frac{\pi}{6}$ 的终边与单位圆的交点的纵坐标是 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 角 $\frac{\pi}{6}$ 的终边与单位圆的交点的坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 。

2. $\frac{4021}{2011}$ 【解析】由题意得，

$$1 + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2} = \frac{2 \times 2 - 1}{2},$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < \frac{5}{3} = \frac{2 \times 3 - 1}{3},$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} < \frac{7}{4} = \frac{2 \times 4 - 1}{4},$$

...

由此可以推断 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{2n-1}{n}$ ，

所以 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{2011^2} < \frac{2 \times 2011 - 1}{2011} = \frac{4021}{2011}$ 。

3. $[0,1]$ 【解析】由题意可得，事件 A 为随机事件，故事件 A 的频率范围为 $[0,1]$ 。

4. -63 【解析】 $\because \vec{a} + \vec{b} = (2, -8)$, $\vec{a} - \vec{b} = (-8, 16)$, $\therefore \vec{a} = (-3, 4)$, $\vec{b} = (5, -12)$,

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \times 5 + 4 \times (-12) = -63.$$

5. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 【解析】由题意得， $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 1$, 则 $BC = \sqrt{2}$, $\therefore BD = BC$, $\therefore BD = \sqrt{2}$,

$$\because \angle DBE = 90^\circ, \angle BDE = 30^\circ, \therefore |DE| = \frac{\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \text{ 又 } \because \vec{AD} - \vec{AE} = \vec{ED}, \therefore |\vec{AD} - \vec{AE}| = |\vec{ED}| = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

6. 3 【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $AB \parallel CD$, $\therefore \triangle CDF \sim \triangle AEF$, $\therefore EB = 2AE$,

$$\therefore AE = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}CD, \therefore \frac{CD}{AE} = 3, \therefore \frac{\triangle CDF \text{ 的周长}}{\triangle AEF \text{ 的周长}} = \frac{CD}{AE} = 3.$$

7. 1 【解析】由题意条件知焦点在 x 轴上，椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

由 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$, 易知 C, D 两点是椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的焦点,

$$\therefore |MC| + |MD| = 2a = 4, \text{ 从而 } |MC| \cdot |MD| \leq \left(\frac{|MC| + |MD|}{2} \right)^2 = 2^2 = 4,$$

当且仅当 $|MC| = |MD|$ 时取等号，即点 M 的坐标为 $(0, \pm 1)$ 时上式取等号，

$$\therefore \frac{1}{|MC|} + \frac{1}{|MD|} = \frac{4}{|MC| \cdot |MD|} \geq \frac{4}{4} = 1, \text{ 则 } \frac{1}{|MC|} + \frac{1}{|MD|} \text{ 的最小值为 } 1.$$

8. 4 【解析】设水箱的高为 x , 底面棱长为 a , 则 $a^2 x = 256$, 其表面积 $S = 4ax + a^2 = 4a \times$

$$\frac{256}{a^2} + a^2 = \frac{1024}{a} + a^2 = \frac{512}{a} + \frac{512}{a} + a^2 \geq 3\sqrt{\frac{512}{a} \times \frac{512}{a} \times a^2} = 3 \times 2^6 = 192, \text{ 当且仅当 } a = 8 \text{ 时,}$$

即 $h = \frac{256}{8^2} = 4$ 时, S 取得最小值.

三、解答题

【参考答案】

(1) 设椭圆 E 的半焦距为 C , 则离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $a = \sqrt{3}c$, $b^2 = a^2 - c^2 = 2c^2$,

椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{3c^2} + \frac{y^2}{2c^2} = 1$, 把 $x = c$ 代入椭圆方程得: $|y| = \frac{2\sqrt{3}c}{3}$,

于是得 $\frac{4\sqrt{3}c}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 解得 $c=1$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 由 (1) 知, $F_1(-1, 0)$, 显然直线 AF_1 不垂直于 y 轴, 设其方程为 $x = ty - 1$,

由 $\begin{cases} x = ty - 1 \\ 2x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$ 消去 x 并整理得: $(2t^2 + 3)y^2 - 4ty - 4 = 0$,

设 $A(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{4t}{2t^2 + 3}$, $y_1 y_2 = \frac{-4}{2t^2 + 3}$,

有 $|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{\left(\frac{4t}{2t^2 + 3}\right)^2 + \frac{16}{2t^2 + 3}} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{t^2 + 1}}{2t^2 + 3}$,

因直线 $y = kx (k \neq 0)$ 与椭圆 E 交于 A 、 B 两点, 由椭圆的对称性知,

点 A 、 B 关于原点 O 对称, 则 $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{6}{7}$,

因此 $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} |OF| |y_1 - y_2| = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{t^2 + 1}}{2t^2 + 3} = \frac{6}{7}$,

解得 $t^2 = 2$, 即 $t = \pm\sqrt{2}$,

所以直线 AC 的方程为 $x - \sqrt{2}y + 1 = 0$ 或 $x + \sqrt{2}y + 1 = 0$.

第十八周

一、选择题

1. C 【解析】 $\because \left\{1, a, \frac{b}{a}\right\} = \{0, a^2, a+b\}$,

$\therefore$ 集合中有 0 和 1, 而 $a \neq 0$, 则 $\frac{b}{a} = 0$, 即 $b = 0$,

则 $\{1, a, 0\} = \{0, a^2, a\}$, $\therefore a^2 = 1$, 解得 $a = \pm 1$,

根据集合的互异性知 $a = -1$, $\therefore a - b = -1 - 0 = -1$.

2. B 【解析】 $f(x) = \sqrt{x}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 不关于原点对称, 所以该函数不具备奇偶性,

选项 A 错误； $f(x)=x^2$ 既是偶函数，又是幂函数，所以选项 B 正确； $f(x)=2x^{-2}$ 不是 $y=x^a$ 的形式，所以它不是幂函数，选项 C 错误； $f(x)=x^{-1}$ 是奇函数，而不是偶函数，选项 D 错误。

3. C 【解析】 $\because x^2 y = 32, \therefore y = \frac{32}{x^2},$

又 $\because x, y \in R^+,$

$$\therefore x + y = x + \frac{32}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{32}{x^2} \geq 3\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{32}{x^2}} = 6, \text{ 当且仅当 } x = 4 \text{ 时取得等号,}$$

$\therefore x + y$ 的最小值为 6.

4. D 【解析】 $\because \vec{a} \parallel \vec{b}, \therefore -2 \times 2 - y = 0,$ 解得 $y = -4, \therefore 2\vec{a} - \vec{b} = 2(1, 2) - (-2, -4) = (4, 8),$

$$\therefore |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}.$$

5. D 【解析】若 $p \vee q$ 为假命题，则 $p、q$ 都为假命题，选项 A 正确； $x=1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ ，而 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 不一定推出 $x=1$ ，还可能 $x=2$ ，故“ $x=1$ ”是“ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ”的充分不必要条件，选项 B 正确；逆否命题是将原命题的条件和结论都否定，再交换条件结论，命题“若 $x^2 - 3x + 2 = 0$ ，则 $x=1$ ”和命题“若 $x \neq 1$ ，则 $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ ”符合逆否命题要求，选项 C 正确；命题 $p: \exists x \geq 0, 2^x = 3$ 是特称命题，否定写法应为 $\neg p: \forall x \geq 0, 2^x \neq 3$ ，选项 D 错误。

6. C 【解析】 $\because$ 幂函数 $y=x^a$ 的图象经过点 $(2, 4), \therefore 4=2^a$ ，解得 $a=2$ ，故函数的解析式为 $y=x^2$ ，故函数经过点 $(-1, 1)$ ，选项 A 正确；当 $x \in [-1, 2]$ 时，函数 $f(x)$ 的值域是 $[0, 4]$ ，选项 B 正确；由于 $f(-x)=(-x)^2=x^2, f(-x)=f(x)$ ，函数不满足 $f(x)+f(-x)=0$ ，选项 C 错误；函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0]$ ，选项 D 正确。

7. C 【解析】 $\because f(x)$ 是定义域在 R 上的奇函数， $\therefore f(0)=0, f(x)$ 是以 3 为周期的函数，且 $f(2)=0, \therefore f(5)=f(2)=0, f(3)=f(0)=0, f(-4)=f(-1)=f(2)=0$ ，又 $\because f(x)$ 是奇函数， $\therefore f(4)=-f(-4)=0, f(1)=-f(-1)=0, \therefore f(x)$ 是奇函数，还可得到 $f(-1.5)=-f(1.5)$ ，再 $\because f(x)$ 是以 3 为周期的函数， $\therefore f(-1.5)=f(1.5), \therefore -f(1.5)=f(1.5), \therefore f(1.5)=0, \therefore f(4.5)=$

$f(1.5)=0$, $\therefore$ 在 $(0, 6)$ 内满足 $f(x)=0$ 的 x 的个数最少为 7 个.

8. C 【解析】 $\because a, b, c$ 成等比数列, $\therefore b^2 = ac$ ①, $\because$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ②, 把①代入②得, $\Delta = b^2 - 4b^2 = -3b^2 < 0$, $\therefore$ 方程必无根.

二、填空题

1. -1 【解析】 $\because x, y \in R$, 由 $(x+y-3) + (y-4)i = 0$ 得, $\begin{cases} x+y-3=0 \\ y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$, $\therefore x = -1$.

2. 48 【解析】样本中职工居住地与公司的距离不超过 4 千米的频率为: $(0.1+0.14) \times 2 = 0.48$, 所以样本中职工居住地与公司的距离不超过 4 千米的人数为: $100 \times 0.48 = 48$ 人.

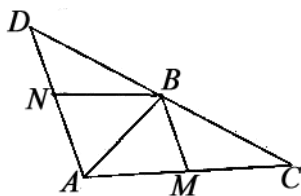
3. 99 【解析】 $\because a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, $\therefore a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\therefore$ 数列前 n 项和为 $S_n = \sqrt{n+1} - 1$, $\therefore \sqrt{n+1} - 1 = 9$, $n = 99$.

4. $\pi + 2$ 【解析】原式 $= \pi - 3 + 2 + \left[\left(\frac{2}{3} \right)^3 \right]^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{4} + 1 = \pi + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \pi + 2$.

5. $\sqrt{3} - 2$ 【解析】如图所示, 设 $AM \parallel BN$, 且 $AM = BN$, 由题意知, 当 λ 取最大值时, 点 E 与点 B 重合. $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 求得 $BC = \sqrt{16 + 64 - 2 \times 4 \times 8 \times \cos 60^\circ} = 4\sqrt{3}$,

又 $\because \overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{AD}$, $\therefore \lambda = \frac{AM}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{4}{4 + 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$,

$\mu = \frac{AN}{AD} = \frac{CB}{CD} = \frac{4\sqrt{3}}{4 + 4\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$, $\therefore \lambda - \mu = \sqrt{3} - 2$.



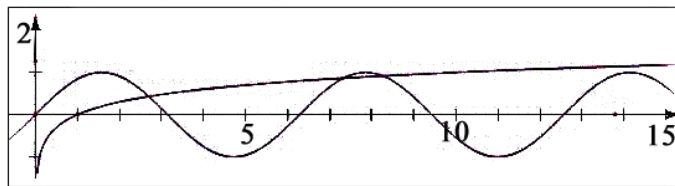
6. 1006 【解析】 $\because \overrightarrow{OA} = a_1 \overrightarrow{OB} + a_{2012} \overrightarrow{OC}$ 且 A, B, C 三点共线 (该直线不过点 O),

$\therefore a_1 + a_{2012} = 1$, $\therefore S_{2012} = \frac{2012}{2} (a_1 + a_{2012}) = 1006$.

7. ①② 【解析】对于①, 函数 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 当 $x = \frac{7\pi}{12}$ 时, $y = -1$, $\therefore$ 函数 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

图象的一条对称轴是 $x = \frac{7\pi}{12}$, 正确;

对于②，在同一坐标系中，画出函数 $y = \sin x$ 和 $y = \lg x$ 的图象，结合图象可知这两个函数的图象有 3 个交点，正确；



对于③，将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到函数 $y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right]$ ，即 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，故不正确；

对于④， $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ ，故不存在实数 x ，使得等式 $\sin x + \cos x = \frac{3}{2}$ 成立。

综上，应填入①②。

8. $(0, 5)$ 【解析】设 $P(0, y)$ ， $\because$ 点 P 满足 PA 的斜率是 PB 斜率的 2 倍， $\therefore \frac{y-8}{0+3} = 2 \times \frac{y-4}{0-2}$ ，
 $\therefore y = 5$ ， $\therefore P(0, 5)$ 。

三、解答题

【参考答案】

(1) 依题意， $f(0) = -1$ ，切点 $(0, -1)$ 在切线 $2x + by + 1 = 0$ 上，则 $b = 1$ ，

$$f'(x) = e^x(2x^2 + ax - 1) + e^x(4x + a) = e^x[2x^2 + (a+4)x + a - 1],$$

而 $f(x)$ 的图象在点 $(0, f(x))$ 处的切线斜率为 -2 ， $f'(0) = a - 1 = -2$ ，解得 $a = -1$ ，

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = e^x(2x^2 - x - 1)$ 。

(2) 由 (1) 知， $f'(x) = e^x(2x^2 + 3x - 2) = e^x(x+2)(2x-1)$ ，

由 $f'(x) = 0$ 得 $x = -2$ 或 $x = \frac{1}{2}$ ，

当 $x \in [-3, 1]$ 时， $-3 < x < -2$ 或 $\frac{1}{2} < x < 1$ ，有 $f'(x) > 0$ ； $-2 < x < \frac{1}{2}$ ，有 $f'(x) < 0$ 。

因此函数 $f(x)$ 在 $[-3, -2]$ ， $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递增，在 $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递减，

$$\text{又 } f(-3) = \frac{20}{e^3}, \quad f(-2) = \frac{9}{e^2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -e^{\frac{1}{2}}, \quad f(1) = 0.$$

所以 $f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 上的最大值为 $\frac{9}{e^2}$, 最小值为 $-e^{\frac{1}{2}}$.

第十九周

一、选择题

1. B 【解析】复数 z_1, z_2 在复平面内的对应点关于实轴对称, $z_1 = 2 - i$, $\therefore z_2 = 2 + i$, 则 $z_1 \cdot z_2 = (2 - i)(2 + i) = 2^2 + 1^2 = 5$.

2. A 【解析】由三角函数的诱导公式知, $\sin(\pi - x) = \sin x$, 得命题 $p: \forall x \in R, \sin(\pi - x) = \sin x$ 是真命题; $\therefore$ 取 $\alpha = 420^\circ, \beta = 60^\circ, \alpha > \beta$, 但 $\sin \alpha > \sin \beta$ 不成立, $\therefore$ 命题 q 为假命题. 根据复合命题的真值表可知, $\neg p$ 是假命题, $\neg q$ 是真命题, 易判断选项 A 是真命题.

3. C 【解析】原方程化简可得 $a(2x - y - 1) + (11 - x - 3y) = 0$, 即上式对任意的 a 恒成立, 所以 $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 11 - x - 3y = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$, 所以恒过点 $(2, 3)$.

4. A 【解析】由题意得, $\begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} > 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $f(x) = \lg \frac{2x-1}{x+1}$ 的定义域为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$.

5. C 【解析】由题意联立得, $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, 设曲线与直线围成的面积为 S , 则 $S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3}$.

6. C 【解析】选项 A, 由函数图象可知, $\begin{cases} m > 0 \\ -(m-3) > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < m < 3$, 此图象是可能的;

选项 B, 由函数图象可知, $m > 0$ 且 $-(m-3) = 0$, 解得 $m = 3$, 此图象是可能的; 选项 C,

由函数图象可知, $m < 0$ 且 $-(m-3) < 0$, 解得 $m < 0$ 且 $m > 3$, 所以 m 无解, 此图象不可能;

选项 D, 有函数图象可知, $m < 0$ 且 $-(m-3) > 0$, 解得 $m < 0$, 此图象是可能的.

7. A 【解析】由 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 可得定义域 $x > 0$, $f(x) = \ln x$ 的定义域 $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ 的定义域

是 $x \neq 0$, $f(x)=|x|$ 的定义域是 $x \in R$, $f(x)=e^x$ 的定义域是 $x \in R$. 选项 A 符合题意.

8. A 【解析】由题意可得, 以 MF 为直径的圆过点 $(0, 2)$, 设 $M(x, y)$,

由抛物线性质 $|MF|=x+\frac{p}{2}=5$, 可得 $x=5-\frac{p}{2}$,

因为圆心是 MF 的中点, 所以根据中点坐标公式可得, 圆心横坐标为 $\frac{5-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}}{2}=\frac{5}{2}$,

由已知圆半径也为 $\frac{5}{2}$, 据此可知该圆与 y 轴相切于点 $(0, 2)$,

故圆心纵坐标为 2, 则点 M 纵坐标为 4, 即 $M\left(5-\frac{p}{2}, 4\right)$,

代入抛物线方程得 $p^2-10p+16=0$, 所以 $p=2$ 或 $p=8$.

二、填空题

1. $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ 【解析】 $S_{\text{底}}=\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $h=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$,

$V_{S-ABC}=\frac{1}{3} \cdot S_{\text{底}} \cdot h=\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

2. $-\frac{4}{5}$ 【解析】 $\because \sin \theta=\frac{3}{5}$, θ 是第二象限角, $\therefore \cos \theta=-\frac{4}{5}$, $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos \theta=-\frac{4}{5}$.

3. $x-y+1=0$ 或 $x+y-7=0$ 【解析】 $\because l$ 过点 $(3, 4)$, 且与两条坐标轴围成一个等腰直角三角形, $\therefore$ 可设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 且 $|a|=|b|$, 将 $(3, 4)$ 代入直线方程可得 $\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1$ 且

$|a|=|b|$, $\therefore \begin{cases} a=7 \\ b=7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$, $\therefore$ 直线 l 的方程为 $x-y+1=0$ 或 $x+y-7=0$.

4. $\frac{4}{\pi^3}$ 【解析】构成试验的全部区域为圆内的区域, 面积为 π^3 , 正弦曲线 $y=-\sin x$ 与 x 轴围成的区域记为 M , 根据图形的对称性得, 面积为 $S=2\int_0^{\pi} \sin x dx = -2\cos x \Big|_0^{\pi} = 4$, 由几何概率的计算公式可得, 随机往圆 O 内投一个点 A , 则点 A 落在区域 M 内的概率 $P=\frac{4}{\pi^3}$.

5. 2301 【解析】首位数字只能为 1, 2, 3. 首位为 1 的四位数有 $A_3^3=6$ 个, 同理首位为 2 的四位数有 $A_3^3=6$ 个, 则第 11 个应该是以 2 开头的四位数中倒数第二个大的数, 是 2301.

6. $\frac{9}{2}$ 【解析】选 y 作积分变量, 将曲线方程写为 $x=y^2$ 及 $x=2-y$,

$$S = \int_{-2}^1 [(2-y) - y^2] dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

7. $y = 2x^2 - 2x$ 【解析】当 $3^x - 2 = 1$, 即 $x = 1$ 时, $f(x) = \log_a 1 + 1 = 1$, $\therefore f(x) = \log_a (3^x - 2) + 1$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象过定点 $P(1, 1)$, 设 $Q(q, q^2 - 2)$, 中点 $M(x, y)$, $x = \frac{1+q}{2}$, $q = 2x - 1$, $y = \frac{1+q^2-2}{2} = \frac{q^2-1}{2} = \frac{(2x-1)^2-1}{2} = 2x^2 - 2x$, $\therefore$ 线段 PQ 的中点 M 轨迹方程是 $y = 2x^2 - 2x$.

8. $[2, \sqrt{5}]$ 【解析】 $\because BC$ 边上的高 $AD = BC = a$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}bc \sin A,$$

$$\therefore \sin A = \frac{a^2}{bc}, \text{ 又 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a^2}{bc} \right),$$

$$\therefore \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = 2 \cos A + \sin A = \sqrt{5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cos A + \frac{\sqrt{5}}{5} \sin A \right) = \sqrt{5} \sin(\alpha + A) \leq \sqrt{5} \text{ (其中 } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{),}$$

$$\text{又 } \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2, \therefore \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \in [2, \sqrt{5}].$$

三、解答题

【参考答案】

行人速度 7.2 千米/时 = 2 米/秒, 骑车人速度 18 千米/时 = 5 米/秒,

(1) 设这列火车的速度为 x 米/秒, 可得方程

$$(x-2) \times 20 = (x-5) \times 26$$

解得 $x = 15$

所以火车的车身总长是 $(15-5) \times 26 = 10 \times 26 = 260$ 米

答: 火车的车身总长是 260 米.

(2) 9 点 18 分时, 骑车人领先行人 $8 \times 60 \times (15-2) = 6240$ 米,

两人已经出发了 $6240 \div (5-2) = 2080$ 秒,

2080 秒 = 34 分 40 秒,

9 点 18 分 - 34 分 40 秒 = 8 点 43 分 20 秒

答: 行人与骑车人早上 8 点 43 分 20 秒从 A 城出发.

(3) 9 点 18 分时, 火车追上骑车人, 往前倒推 2080 秒, 回到骑车人出发的时候,

此时火车距离 A 城 $2080 \times (15 - 5) = 20800$ 米 = 20.8 千米.

答: 他们出发时, 火车头离 A 城还有 20.8 千米.

第二十周

一、选择题

1. C 【解析】 $\because$ 集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \left| \frac{1}{x} \leq 2 \right.\right\} = \{x \in \mathbb{Z} | x < 0 \text{ 或 } x \geq \frac{1}{2}\}$, $\therefore A \cap B = \{-2, -1, 1, 2\}$, $\therefore$ 集合 $A \cap B$ 的子集个数为 $2^4 = 16$.

2. C 【解析】由题意得, $\because z_1 = z_2$, $\therefore a = 2$, $b = -3$, $ab = 2 \times (-3) = -6$.

3. A 【解析】由 $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos B}{2}}$, 得 $2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \cos A = \cos B$, $\therefore A = B$, $\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

4. C 【解析】由题意得, 设老年职工有 x 人, 则中年职工人数为 $2x$,

$160 + x + 2x = 430$, 解得 $x = 90$.

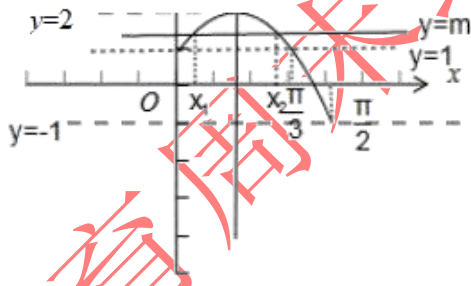
设样本中的老年职工人数为 y 人,

则由分层抽样的定义和方法可得, $\frac{32}{160} = \frac{y}{90}$, 解得 $y = 18$.

5. D 【解析】由题意得, 一共有 4 件一等品, 至少两件一等品分为 2 件, 3 件, 4 件. 第一类, 一等品 2 件, 从 4 件任取 2 件, 再从 3 件二等品或 2 件三等品共 5 件产品中任取 2 件, 有 $C_4^2 \cdot C_5^2$; 第二类, 一等品 3 件, 从 4 件任取 3 件, 再从 3 件二等品或 2 件三等品共 5 件产品中任取 1 件, 有 $C_4^3 \cdot C_5^1$; 第三类, 一等品 4 件, 从 4 件中全取, 有 $C_4^4 \cdot C_5^0$. 根据分类计数原理得, 至少有两件一等品的抽取方法是 $C_4^2 \cdot C_5^2 + C_4^3 \cdot C_5^1 + C_4^4 \cdot C_5^0$.

6. B 【解析】 $\because$ 函数 $y = ax^2 + bx - 1$ 在 $(-\infty, 0]$ 是单调函数, $\therefore$ 当 $a = 0$ 时, $y = 2ax + b$ 的图象可能是选项 A; 当 $a > 0$ 时, $-\frac{b}{2a} \geq 0 \Rightarrow b \leq 0$, $y = 2ax + b$ 的图象可能是选项 C; 当 $a < 0$ 时, $-\frac{b}{2a} \leq 0 \Rightarrow b \leq 0$, $y = 2ax + b$ 的图象可能是选项 D. 故 $y = 2ax + b$ 的图象不可能是选项 B.

7. D 【解析】 $\because f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x - m = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) - m = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - m$,
 $\because x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, $\therefore 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right]$, $\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$, $\therefore -1 \leq 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 2$,
 $\therefore f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x - m$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 上有两个零点 x_1, x_2
 $\therefore$ 函数 $y = m$ 与 $g(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 有两个交点, 如图,
 $\therefore x_1 + x_2 = \frac{\pi}{3}$, $\therefore \tan \frac{x_1 + x_2}{2} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



8. A 【解析】由题意得, $\therefore AB$ 的中点 M 的集合为与直线 $l_1: x + y - 7 = 0$ 和 $l_2: x + y - 5 = 0$ 距离都相等的直线, 则 M 到原点的距离的最小值为原点到直线的距离, 设点 M 所在直线的方程为 $l: x + y + m = 0$, 根据平行间的距离公式得, $\frac{|m+7|}{\sqrt{2}} = \frac{|m+5|}{\sqrt{2}} = |m+7| = |m+5|$,
 $m = -6$, 即 $l: x + y - 6 = 0$, 根据点到直线的距离公式, 得 M 到原点的距离的最小值为 $\frac{|-6|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

二、填空题

1. $a(1+50\%) \times 80\% = a + 15$ 【解析】进价为 a 元, 按照进价提高 50% 后标价, 所以标价为 $a(1+50\%)$, 再打八折卖出, 因此卖出价为 $a(1+50\%) \times 80\%$, 此时仍能获利 15 元, 所以有 $a(1+50\%) \times 80\% = a + 15$.

2. 2 【解析】集合 $A = \{0, 2, a^2\}$, $B = \{1, a\}$, 且 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4\}$, 则有 $a = 4$ 或 $a = 2$.

当 $a = 4$ 时, $A = \{0, 2, 16\}$, $B = \{1, 4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$, 不合题意, 舍去;

当 $a = 2$ 时, $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 4\}$, 符合.

3. -2018 【解析】因为 $ab \neq 0$, 所以等式两边同时除以 ab , 得 $\frac{a}{b} + 2018 + \frac{b}{a} = 0$, 则

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -2018.$$

4. $x = 1$ 【解析】 $\because y = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$, $\therefore$ 抛物线 $y = x^2 - 2x$ 关于直线 $x = 1$ 对称. $\because$ 函数 $y = g(x) = \cos(x - 1)$ 满足 $g(1 + x) = g(1 - x) = \cos x$, $\therefore$ 函数 $y = \cos(x - 1)$ 的图象也关于直线 $x = 1$ 对称, 将两个函数相加, 得函数 $f(x) = x^2 - 2x + \cos(x - 1)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称.

5. $x - y - 2 = 0$ 【解析】 $\because A(2, 0)$, $B(3, 1)$, $\therefore k = \frac{1 - 0}{3 - 2} = 1$, $\therefore$ 直线方程 $y - 1 = x - 3$, 即 $x - y - 2 = 0$.

6. ③④ 【解析】对于①, 因为 $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}$, 所以存在实数 x , 使 $\sin x + \cos x = \frac{3}{2}$ 不成立; 对于②, 若 α, β 是第一象限角, 且 $\alpha > \beta$, 因为 $y = \cos x$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 函数是减函数, 则 $\cos \alpha < \cos \beta$, 但是 $\alpha > \beta$ 不在一个单调区间时, 可能 $\cos \alpha > \cos \beta$, 故不正确; 对于③, 因为 $y = \sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{2}{3}x$, 所以函数 $y = \sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)$ 是偶函数, 故正确; 对于④, A, B, C 为锐角 $\triangle ABC$ 的三个内角, 因为 $A + B > \frac{\pi}{2}$, 所以 $A > \frac{\pi}{2} - B$, 所以 $\sin A > \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos B$, 即 $\sin A > \cos B$, 故正确. 综上, 正确的命题是③④.

7. 2π 【解析】函数 $y_1 = |\sin x|$ 可得, $T_1 = \pi$, $y_2 = |\tan x|$ 的周期 $T_2 = \pi$, $\therefore T_1 + T_2 = 2\pi$.

8. $y^2 = 20x$ 【解析】抛物线 $y^2 = 4mx (m > 0)$ 的焦点 $F(m, 0)$, 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的一条渐近线为 $3x - 4y = 0$, 由题意知 $\frac{|3m|}{5} = 3$, $\therefore m = 5$, $\therefore$ 抛物线的方程为 $y^2 = 20x$.

三、解答题

【参考答案】

$$(1) \because AH \perp x \text{ 轴于点 } H, AC = 4\sqrt{5}, \cos \angle ACH = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\frac{HC}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{HC}{4\sqrt{5}}, \text{ 解得 } HC = 4,$$

$\therefore$ 点 O 是线段 CH 的中点,

$$\therefore HO = CO = 2,$$

$$\therefore AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 4^2} = 8,$$

$$\therefore A(-2, 8),$$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象过点 A ,

$$\therefore k = -2 \times 8 = -16,$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = -\frac{16}{x},$$

将 B 的坐标 $(4, n)$ 代入得 $n = -\frac{16}{4}$, 解得 $n = -4$, $\therefore B(4, -4)$,

将 $A(-2, 8)$, $B(4, -4)$ 代入 $y = ax + b$ 得:

$$\begin{cases} -2a + b = 8 \\ 4a + b = -4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}.$$

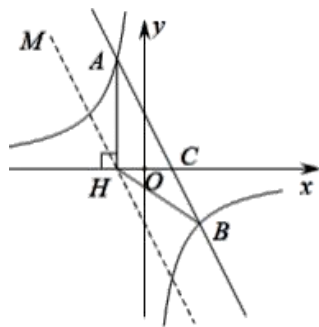
$\therefore$ 一次函数解析式为 $y = -2x + 4$.

(2) 如图, 过 H 作 AB 的平行线 HM , 交反比例图象于点 P .

此时 $S_{\triangle APB} = S_{\triangle AHB}$,

设直线 HM 的解析式为 $y = -2x + m$,

把 $H(-2, 0)$ 代入, 得 $0 = 4 + m$, 解得 $m = -4$,



∴ 直线 HM 的解析式为 $y = -2x - 4$,

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = -2x - 4 \\ y = -\frac{16}{x} \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2 \\ y = -8 \end{cases},$$

∴ 点 P 的坐标为 $(-4, 4)$ 或 $(2, -8)$.

敏试教育周末练习册