2022年福建教招考前冲刺班

小学数学·主干知识

（参考答案）

敏试教育教研中心 主编

目录

第一章 应用题 1

第二章 平面几何 3

第三章 函数 6

（一）二次函数 6

（二）三角函数 7

（三）函数性质（导数的应用） 9

第四章 概率统计 11

第五章 圆锥曲线 13

第六章 数列 16

第一章　应用题

【模拟演练】

题型一：行程问题

例 1、【解答】解：由题意可知甲船为顺水行驶，乙船为逆水行驶.

甲船 4 小时后与漂流物相距 100 千米，即可求出 $v_{船}=\frac{100}{4}=25$；

乙船行 12 小时后与漂流物相遇，即可求出 $L=12\times 25=300$ 千米.

答：河长 300 千米.

例 2、【解答】解法一：由题意知乙车的速度：$40\times\frac{7}{8}=35$（千米/小时）；

在返回时如果甲的速度不变，则甲乙用时是相等的，

而返回时甲速度提高了 25%，即其速度变为原来的 $(1+25\%)$，即 $\frac{5}{4}$，

所用时间就为原来的 $\frac{4}{5}$，$1:\frac{4}{5}=5:4$ 时间也提前了总时间的 $\frac{1}{5}$，

所以总时间为 $\frac{4}{5}\div\frac{1}{5}=4$（小时），$AB$ 两地路程为 $(40+35)\times 4=300$（千米）.

解法二：相遇后，甲乙两车的速度比变为：$[8\times(1+25\%)]:7=10:7$，

当甲车返回 A 地时，甲又行了全程的 $\frac{8}{15}$，则乙又行了全程的：$\frac{8}{15}\times\frac{7}{10}=\frac{28}{75}$，

则 A、B 两地相距：$35\times\frac{4}{5}\div(\frac{7}{15}-\frac{28}{75})=28\div\frac{7}{75}=300$（千米）.

答：A、B 两地距离是 300 千米.

题型二：利润问题

例、【解答】解：（1）设 A、B 两种相册的售价分别是 x 元、y 元，根据题意得：

$\begin{cases}2x+3y=110\\4x+5y=200\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=25\\y=20\end{cases}$.

答：A、B 两种相册的售价分别是 25 元、20 元；

（2）设买 A 种相册 x 册．买这两种相册共花费 y 元，

$\begin{cases}25x+20(45-x)\leqslant 1000\\x\geqslant\frac{1}{2}(45-x)\end{cases}$，解得：$15\leqslant x\leqslant 20$.

$\therefore$ 有 6 种不同的购买方案；

（3）设买 A 种相册 m 册，B 种相册 $(45-m)$ 册，此时商店获利 w 元，

①当 $0\leqslant m\leqslant 10$ 时，$w=(25-18)m+(20-16)(45-m)=3m+180$，

当 $m=10$ 时，利润最大为 210 元；

②当 $10<m\leqslant 45$ 时，$w=3m+180-0.1m(m-10)=-0.1(m-20)^2+220$，

$\because -0.1<0$，开口向下，

$\therefore$ 当 $m=20$ 时，利润最大为 220 元；

$\because 220>210$，

$\therefore$ 当 $m=20$ 时，有最大利润为 220 元.

答：分别购买 A、B 相册 20 本和 25 本时，商店获利最大，最大利润是 220 元.

题型三：分配问题

例、【解答】解：设捐 100 元、500 元、2000 元的人数分别为 x、y、z，

由题意得$\begin{cases} x+y+z=100\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① \\ 100x+500y+2000z=19000\cdots② \end{cases}$

由②得 $x+5y+20z=190$③

③—①得 $4y+19z=90$.

故 z 为不能被 4 除尽且 $z<5$ 的偶数，所以 $z=2$，$y=13$.

答：该单位有 13 人捐款 500 元.

题型四：工程问题

例、【解答】解：（1）设乙队单独完成这项工程需 x 天，则甲队单独完成这项工作所需天数是 $3x$ 天，依题意得：$\dfrac{30}{3x}+\dfrac{10}{x}=1$，解得 $x=20$，

检验，当 $x=20$ 时，$3x\neq 0$，

所以原方程的解为 $x=20$.

所以 $3x=3\times 20=60$（天）.

答：乙队单独完成这项工程需 20 天，则甲队单独完成这项工作所需天数是 60 天；

（2）设甲、乙两队合作完成这项工程需要 y 天，

则有 $y(\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{60})=1$，解得 $y=15$.

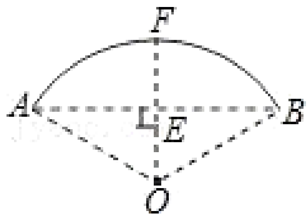
需要施工的费用：$15\times(15.6+18.4)=510$（万元）.

$\because 510>500$，

$\therefore$ 工程预算的费用不够用，需要追加预算 10 万元.

题型五：几何形体问题

例、【解答】解：连接OB，过点O作$OE\perp AB$，垂足为E，交$\overset{\frown}{AB}$于F，如图，



由垂径定理，可知：E是AB中点，F是$\overset{\frown}{AB}$中点，

$\therefore EF$是弓形高，$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{3}$，$EF=2$，

设半径为R米，则$OE=(R-2)$米，

在RtΔAOE中，由勾股定理，得$R^2=(R-2)^2+(2\sqrt{3})^2$，解得$R=4$，

$\because \sin\angle AOE=\frac{AE}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \angle AOE=60^\circ$，$\therefore \angle AOB=120$度．

$\therefore \overset{\frown}{AB}$的长为$\frac{120\times 4\pi}{180}=\frac{8}{3}\pi(m)$，

$\therefore$帆布的面积为$\frac{8}{3}\pi\times 60=160\pi$（平方米）．

第二章　平面几何

【模拟演练】

题型一：动点问题

例、【解答】解：（1）在直角ΔABC中，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=4$，

则Q从C到B经过的路程是9，需要的时间是4.5秒．

此时P运动的路程是4.5，P和Q之间的距离是：$3+4+5-4.5=7.5$．

根据题意得：$(t-4.5)+2(t-4.5)=7.5$，解得：$t=7$．

答：当$t=7$秒时，点P与点Q相遇．

（2）Q从C到A的时间是3秒，P从A到C的时间是3秒，

则当$0\leqslant t\leqslant 2$时，若ΔPCQ为等腰三角形，则一定有：$PC=CQ$，

即$3-t=2t$，解得：$t=1$．

当$2<t\leqslant 3$时，若ΔPCQ为等腰三角形，则一定有$PQ=QC$（如图1），

则Q在PC的中垂线上，作$QH\perp AC$，则$QH=\frac{1}{2}PC$．

$\Delta AQH\backsim\Delta ABC$，

在直角ΔAQH中，$AQ=2t-4$，则$QH=\frac{3}{5}AQ=\frac{3}{5}(2t-4)$，

$\because PC=BC-BP=3-t$，

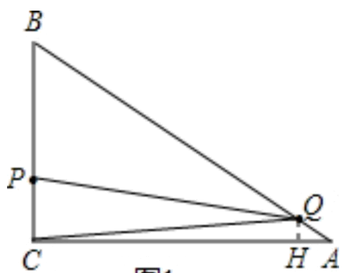


图1

$\therefore \frac{3}{5}(2t-4)\cdot 2=3-t$，解得：$t=\frac{39}{17}$；

综上，当 $t=1$ 或 $t=\frac{39}{17}$ 时 ΔPCQ 为等腰三角形.

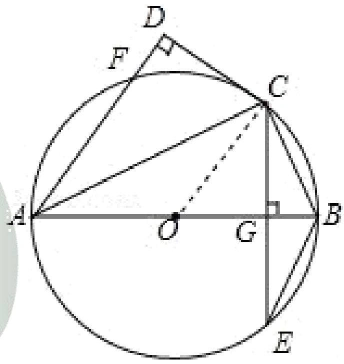
（3）在点 Q 从点 B 返回点 A 的运动过程中，P 一定在 AC 上，则 $PC=t-3$，

同（2）可得：ΔPCQ 中，PC 边上的高是：$\frac{3}{5}(14-2t)$，

故 $s=\frac{1}{2}(t-3)\times\frac{3}{5}(14-2t)=-\frac{3}{5}t^2+6t-\frac{63}{5}$.

题型二：圆+三角形

例 1、【解答】（1）证明：连接 CO，



$\because CA$ 是 $\angle BAF$ 的平分线，$\therefore \angle DAC=\angle CAB$，

$\because AO=CO$，$\therefore \angle OAC=\angle OCA$，

$\therefore \angle DAC=\angle OCA$，$\therefore AD//CO$，

$\because CD\perp AF$，$\therefore OC\perp DC$，

$\therefore DC$ 是 $\odot O$ 的切线；

（2）解：$\because \angle BAC+\angle ACG=90^\circ$，$\angle BCG+\angle ACG=90^\circ$，

$\therefore \angle GAC=\angle BCG$，又 $\because \angle ACB=\angle BGC$，

$\therefore \Delta ABC\backsim\Delta CBG$，$\therefore \frac{CG}{AC}=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{5}$，

故 $\frac{S_{\Delta CBE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2S_{\Delta CBG}}{S_{\Delta ABC}}=2\times(\frac{2}{5})^2=\frac{8}{25}$.

例 2、【解答】解：（1）$\because BE$ 为圆 O 的切线，BA 为圆的弦，

$\therefore \angle EBA$ 为弦切角，

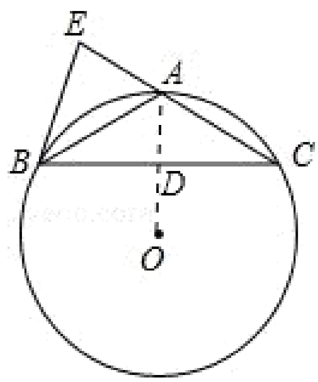
$\therefore \angle EBA=\angle C$，又 $\angle EBC=2\angle C$，

$\therefore \angle EBC=2\angle EBA$，

$\therefore \angle ABC=\angle C$，

$\therefore AB=AC$；

（2）（i）连接 OA.



$\because AB=AC$，$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，$\therefore OA\perp BC$，

$\therefore D$ 为 BC 的中点，即 $BD=CD$，

$\because \tan\angle ABE=\frac{1}{2}$，$\angle EBA=\angle ABC$，$\therefore \tan\angle ABC=\frac{1}{2}$，

在 Rt△ABD 中，$\tan\angle ABC=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{1}{2}$，

设 $AD=k$，则 $BD=2k$，$BC=4k$，

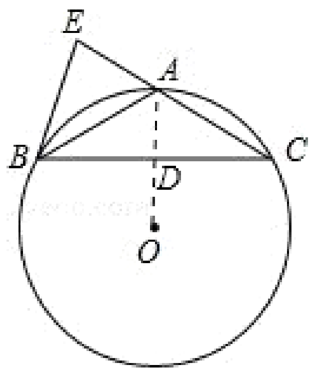
在 ΔABD 中，$\angle ADB=90°$，根据勾股定理得：$AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{5}k$，

则 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sqrt{5}k}{4k}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$；

（ii）在 Rt△ADC 中，$AC=AB=2$，$\tan\angle ABE=\tan C=\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{1}{2}$，

设 $AD=x$，$DC=2x$，根据勾股定理得：$x^2+(2x)^2=2^2$，解得：$x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore BC=2DC=4x=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$，



$\because \angle EBA=\angle C$，$\angle E=\angle E$，$\therefore \Delta AEB\backsim\Delta BEC$，

$\therefore \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{\frac{8\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$，$\therefore BE=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}AE$，

又 $\because \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{BE}{EC}$，即 $BE^2=AE\bullet CE$，

$\therefore (\dfrac{4\sqrt{5}}{5}AE)^2=AE(AC+AE)=AE(2+AE)$，

整理得：$\dfrac{16}{5}AE^2=2AE+AE^2$，

解得：$AE=\dfrac{10}{11}$．

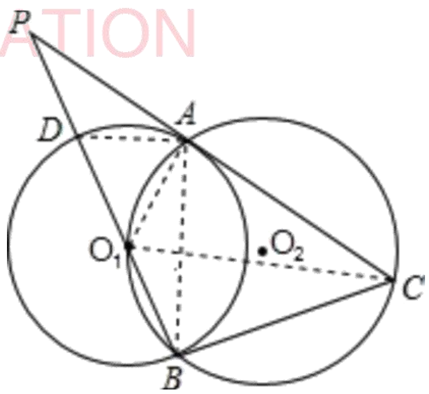
例 3、【解答】解：（1）连结 AO_1，

∵BC 是⊙O_1 的切线，∴$\angle O_1BC=90°$，

∵四边形 AO_1BC 是⊙O_2 的内接四边形，

∴$\angle O_1BC+\angle O_1AC=180°$，∴$\angle O_1AC=90°$，

∴AC 是⊙O_1 的切线．



（2）连结 AB

∵PC 切⊙O_1 于点 A，∴$\angle PAD=\angle ABP$

又 $\angle ACO_1=\angle ABO_1$

∴$\angle PAD=\angle ACO_1$，∴$AD\parallel O_1C$．

（3）∵PC 是⊙O_1 的切线，PB 是⊙O_1 的割线，∴$PA^2=PD\cdot PB$

∵$PD=1$，$PB=5$，∴$PA=\sqrt{5}$

∵AC、BC 分别切⊙O_1 于 A、B

∴$O_1B \perp BC$，$O_1A \perp PC$

∴$\angle PBC=\angle PAO_1=90°$

又$\angle P=\angle P$，∴$\triangle PBC \backsim \triangle PAO_1$

∴ $\dfrac{BC}{AO_1}=\dfrac{PB}{PA}$，即 $\dfrac{BC}{2}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}$

∴$BC=2\sqrt{5}$.

第三章　函数

（一）二次函数

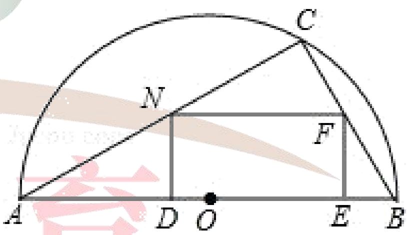
【模拟演练】

例 1、【解答】解：（1）过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M，则 $CM=h$，

在 RtΔABC 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

根据三角形面积公式得：$S_{\Delta ACB}=\dfrac{1}{2}AC \times BC=\dfrac{1}{2}AB \times h$，

$\therefore h=\dfrac{AC \times BC}{AB}=\dfrac{8 \times 6}{10}=4.8$；



（2）$\because$如图，$NF//AB$，

$\therefore \Delta CNF \backsim \Delta CAB$

$\therefore \dfrac{h-DN}{h}=\dfrac{NF}{AB}$，

$\therefore NF=\dfrac{10(4.8-x)}{4.8}$，

$\therefore S_{矩形DEFN}=NF \cdot x=-\dfrac{25}{12}(x-2.4)^2+12$，

则当 $x=2.4$ 时，$S_{矩形DEFN}$ 最大.

例 2、【解答】解：（1）由题意，得：$\begin{cases}8-4b+c=0\\ \dfrac{1}{2}+b+c=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}b=\dfrac{3}{2}\\ c=-2\end{cases}$；$\therefore y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x-2$；

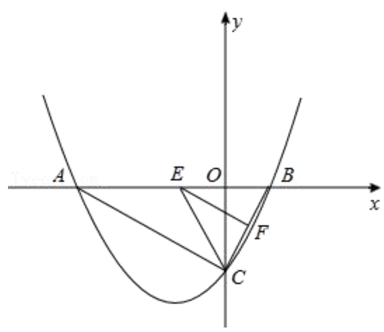
（2）由（1）知：$C(0,-2)$；

则 $AC^2=AO^2+OC^2=20$，$BC^2=BO^2+OC^2=5$；

而 $AB^2=25=AC^2+BC^2$；$\therefore \Delta ACB$ 是直角三角形，

且 $\angle ACB=90°$，$\therefore AC \perp BC$，

$\because EF//AC$，$\therefore EF \perp BC$；



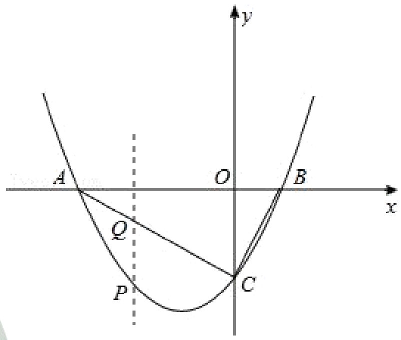
$\because S_{\triangle CEF}=2S_{\triangle BEF}$，$\therefore CF=2BF$，$BC=3BF$；

$\because EF//AC$，$\therefore \dfrac{BE}{AB}=\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{1}{3}$；

$\because AB=5$，$\therefore BE=\dfrac{5}{3}$；

$OE=BE-OB=\dfrac{2}{3}$，故 $E(-\dfrac{2}{3}，0)$；

（3）设 P 点坐标为 $(m,\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{3}{2}m-2)$；



已知 $A(-4,0)$，$C(0,-2)$，设直线 AC 的解析式为：$y=kx-2$，

则有：$-4k-2=0$，$k=-\dfrac{1}{2}$；

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x-2$；

$\therefore Q$ 点坐标为 $(m,-\dfrac{1}{2}m-2)$；

则 $PQ=(-\dfrac{1}{2}m-2)-(\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{3}{2}m-2)=-\dfrac{1}{2}m^2-2m$；

$\therefore$ 当 $m=-2$，即 $P(-2,-3)$ 时，PQ 最大，且最大值为 2.

故当 P 运动到 OA 垂直平分线上时，PQ 的值最大，此时 $P(-2,-3)$.

（二）三角函数

【模拟演练】

例 1、【解答】解：（1）因为 $f(x)=4\tan x\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)\cdot\cos(x-\dfrac{\pi}{3})-\sqrt{3}$，

则 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，所以函数的定义域为 $\{x|x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}，k\in Z\}$，

又 $f(x)=4\tan x\cos x\cdot(\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x)-\sqrt{3}$

$=4\sin x(\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x)-\sqrt{3}$

$=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{3}$

$=\sin 2x+\sqrt{3}(1-\cos 2x)-\sqrt{3}$

$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

（2）令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$， $k\in Z$，

解得 $k\pi-\frac{\pi}{12}<x<k\pi+\frac{5\pi}{12}$， $k\in Z$，

当 $k=0$ 时， $-\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12}$， $\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增，

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{3}<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$， $k\in Z$，

解得 $k\pi+\frac{5\pi}{12}<x<k\pi+\frac{11\pi}{12}$， $k\in Z$，

当 $k=-1$ 时， $-\frac{7\pi}{12}<x<k\pi-\frac{\pi}{12}$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}$， $-\frac{\pi}{12}]$ 上单调递减，

综上所述， $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}$， $-\frac{\pi}{12}]$ 上单调递减，在区间 $[-\frac{\pi}{12}$， $\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增；

（3）由（2）可知， $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}$， $-\frac{\pi}{12}]$ 上单调递减，在区间 $[-\frac{\pi}{12}$， $\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{min}=f(-\frac{\pi}{12})=2\sin[2\times(-\frac{\pi}{12})-\frac{\pi}{3}]=2\sin(-\frac{\pi}{2})=-2$，

因为 $f(-\frac{\pi}{4})=2\sin(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=-1$， $f(\frac{\pi}{4})=2\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=1$，

则 $f(x)_{max}=1$，

因为 $x\in[-\frac{\pi}{4}$， $\frac{\pi}{4}]$ 时，不等式 $2-c<f(x)<c$ 恒成立，

则 $\begin{cases}2-c<f(x)_{min}\\c>f(x)_{max}\end{cases}$，即 $\begin{cases}2-c<-2\\c>1\end{cases}$，解得 $c>4$，

所以实数 c 的取值范围为 $(4,+\infty)$．

例 2、【解答】解：（Ⅰ）在 ΔABC 中，由余弦定理可知， $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，

由题意知 $a^2+c^2-b^2=\frac{1}{2}ac$， $\therefore\cos B=\frac{1}{4}$，

又在 ΔABC 中， $A+B+C=\pi$， $\therefore\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}$，

则原式 $=\cos^2\frac{B}{2}+\cos 2B=\frac{1+\cos B}{2}+2\cos^2 B-1=2\cos^2 B+\frac{1}{2}\cos B-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$；

（Ⅱ） $\because b=2$， $\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

$\therefore$ 由 $a^2+c^2-b^2=\frac{1}{2}ac$ 得：$a^2+c^2-4=\frac{1}{2}ac$，即 $a^2+c^2=\frac{1}{2}ac+4\geqslant 2ac$，

整理得：$ac\leqslant\frac{8}{3}$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leqslant\frac{4}{3}\sin B=\frac{\sqrt{15}}{3}$，

则 ΔABC 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$．

例 3、【解答】解：（1）由已知，$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $2b\cos C=2a-c$，

由正弦定理，得 $2\sin B\cos C=2\sin(B+C)-\sin C$，

即 $2\sin B\cos C=2\sin B\cos C+2\cos B\sin C-\sin C$.

在△ABC 中，$\sin C\neq 0$，因而 $2\cos B=1$，则 $B=\frac{\pi}{3}$.

又 $b^2=ac$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

因而 $ac=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{3}$，即 $(a-c)^2=0$，

所以 $a=c$，△ABC 为等边三角形．

（2）$\because$ 由（1）可得：$B=\frac{\pi}{3}$．

$$\therefore y=1-\frac{2\cos 2A}{1+\tan A}=1-\frac{2(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)}{\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}}$$

$$=1-2(\cos A-\sin A)\cos A=1-2\cos^2 A+2\sin A\cos A=\sqrt{2}\sin(2A-\frac{\pi}{4}),\quad (\cos A\neq 0),$$

$\because A\in(0,\frac{2\pi}{3})$，$2A-\frac{\pi}{4}\in(-\frac{\pi}{4}，\frac{13\pi}{12})$，

$\therefore \sin(2A-\frac{\pi}{4})\in(-\frac{\sqrt{2}}{2}，1]$，

$\therefore y=1-\frac{2\cos 2A}{1+\tan A}=\sqrt{2}\sin(2A-\frac{\pi}{4})\in(-1，\sqrt{2}]$．

（三）函数性质（导数的应用）

【模拟演练】

例 1、【解答】解：（1）当 $m=1$ 时，$f(x)=e^x+2x$，

$f'(x)=e^x+2$，$f(0)=1$，$f'(0)=3$，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0，f(0))$ 处的切线方程为：$y-1=3x$，化为 $3x-y+1=0$．

（2）不等式 $e^x+\frac{x^2}{2}+mlnx+m\geqslant f(x)$，

化为：$m(lnx-x+1)\geqslant x-\frac{1}{2}x^2$，

令 $u(x)=lnx-x+1$，$x\in[1,\ 2]$，

$u'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}\leqslant 0$，

$\therefore$ 函数 $u(x)$ 在 $x\in[1,\ 2]$ 上单调递减，$\therefore u(x)\leqslant 0$，

$x\neq 1$ 时，$m(lnx-x+1)\geqslant x-\frac{1}{2}x^2$ 化为：$m\leqslant\frac{x-\frac{1}{2}x^2}{lnx-x+1}=g(x)$，$x\in(1,\ 2]$．

$g'(x)=\frac{(1-x)(lnx-\frac{1}{2}x)}{(lnx-x+1)^2}$，

令 $v(x)=lnx-\frac{1}{2}x$，

$v'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}\geqslant 0$，

$\therefore v(x)\leqslant v$（2）$=ln2-1<0$，

$\therefore g'(x)\geqslant 0$，$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $x\in(1,\ 2]$ 上单调递增．

$\therefore g(x)\leqslant g$（2）$=0$，

$\because$ 存在 $x\in[1,\ 2]$，使得不等式 $e^x+\frac{x^2}{2}+mlnx+m\geqslant f(x)$ 成立，

$\therefore m\leqslant 0$，即 m 的取值范围是 $(-\infty,\ 0]$．

例 2、【解答】 解：（1）$\because$ 函数 $g\left(x\right)=f'\left(x\right)-\frac{x}{3}=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}-\frac{x}{3}(x>0)$，

令 $g\left(x\right)=0$，得 $m=-\frac{1}{3}x^3+x\left(x>0\right)$；

设 $\varphi\left(x\right)=-\frac{1}{3}x^3+x\left(x>0\right)$，

$\therefore \varphi'\left(x\right)=-x^2+1=-\left(x-1\right)\left(x+1\right)$；

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$\varphi'\left(x\right)>0$，$\varphi\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上是增函数，

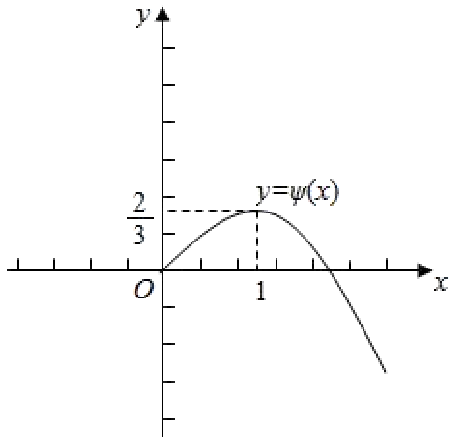
当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$\varphi'\left(x\right)<0$，$\varphi\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上是减函数；

$\therefore x=1$ 是 $\varphi\left(x\right)$ 的极值点，且是极大值点，

$\therefore x=1$ 是 $\varphi\left(x\right)$ 的最大值点，

$\therefore \varphi\left(x\right)$ 的最大值为 $\varphi\left(1\right)=\dfrac{2}{3}$；

又 $\varphi\left(0\right)=0$，结合 $y=\varphi\left(x\right)$ 的图象，如图；



可知：①当 $m>\dfrac{2}{3}$ 时，函数 $g\left(x\right)$ 无零点；

②当 $m=\dfrac{2}{3}$ 时，函数 $g\left(x\right)$ 有且只有一个零点；

③当 $0<m<\dfrac{2}{3}$ 时，函数 $g\left(x\right)$ 有两个零点；

④当 $m\le 0$ 时，函数 $g\left(x\right)$ 有且只有一个零点；

综上，当 $m>\dfrac{2}{3}$ 时，函数 $g\left(x\right)$ 无零点；

当 $m=\dfrac{2}{3}$ 或 $m\le 0$ 时，函数 $g\left(x\right)$ 有且只有一个零点；

当 $0<m<\dfrac{2}{3}$ 时，函数 $g\left(x\right)$ 有两个零点；

（2）对任意 $b>a>0$，$\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}<1$ 恒成立，

等价于 $f\left(b\right)-b<f\left(a\right)-a$ 恒成立；

设 $h\left(x\right)=f\left(x\right)-x=\ln x+\dfrac{m}{x}-x(x>0)$，

则 $h\left(b\right)<h\left(a\right)$.

$\therefore h\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减；

$\because h'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{m}{x^2}-1\le 0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，

$\therefore m\ge -x^2+x=-(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}(x>0)$，

$\therefore m\ge \dfrac{1}{4}$；

对于 $m=\dfrac{1}{4}$，$h'\left(x\right)=0$ 仅在 $x=\dfrac{1}{2}$ 时成立；

$\therefore m$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.

第四章　概率统计

【模拟演练】

例 1、【解答】解：（1）重量超过 505 克的产品数量是 $40\times(0.05\times5+0.01\times5)=12$ 件；

（2）Y 的所有可能取值为 0，1，2；

$P(Y=0)=\dfrac{C_{28}^2}{C_{40}^2}=\dfrac{63}{130}$，$P(Y=1)=\dfrac{C_{12}^1C_{28}^1}{C_{40}^2}=\dfrac{56}{130}$，$P(Y=2)=\dfrac{C_{12}^2}{C_{40}^2}=\dfrac{11}{130}$，

$\therefore Y$ 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\dfrac{63}{130}$	$\dfrac{28}{65}$	$\dfrac{11}{130}$

（3）从流水线上任取 1 件产品，重量超过 505 克的概率为 $\dfrac{12}{40}=\dfrac{3}{10}$

$\therefore$ 重量不超过 505 克的概率为 $1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}$；

$\therefore$ 从流水线上任取 5 件产品，恰有 2 件产品合格的重量超过 505 克的概率为 $C_5^2(\dfrac{3}{10})^2\cdot(\dfrac{7}{10})^3$．

例 2、【解答】解：记 A_1，A_2 分别表示甲击中 9 环，10 环，B_1，B_2 分别表示乙击中 8 环，9 环，A 表示在一轮比赛中甲击中的环数多于乙击中的环数，

B 表示在三轮比赛中至少有两轮甲击中的环数多于乙击中的环数，

C_1，C_2 分别表示三轮中恰有两轮，三轮甲击中环数多于乙击中的环数．

（1）甲、乙的射击相互独立

在一轮比赛中甲击中的环数多于乙击中环数包括三种情况，

用事件分别表示为 $A=A_1\cdot B_1+A_2\cdot B_1+A_2\cdot B_2$，且这三种情况是互斥的，

根据互斥事件和相互独立事件的概率公式得到

$\therefore P$（A）$=P(A_1\cdot B_1+A_2\cdot B_1+A_2\cdot B_2)=P(A_1\cdot B_1)+P(A_2\cdot B_1)+P(A_2\cdot B_2)$

$=P(A_1)\cdot P(B_1)+P(A_2)\cdot P(B_1)+P(A_2)\cdot P(B_2)$

$=0.3\times0.4+0.1\times0.4+0.1\times0.4=0.2$．

（2）由题意知在独立的三轮比赛中，至少有两轮甲击中的环数多于乙击中环数表示三轮中恰有两轮或三轮甲击中环数多于乙击中的环数，这两种情况是互斥的，即 $B=C_1+C_2$，

$\because P(C_1)=C_3^2[P$（A）$]^2[1-P$（A）$]=3\times0.2^2\times(1-0.2)=0.096$，

$P(C_2)=[P$（A）$]^3=0.2^3=0.008$，

$\therefore P$（B）$=P(C_1+C_2)=P(C_1)+P(C_2)=0.096+0.008=0.104$.

例 3、【解答】解：（1）随机变量 $\xi=2$ 表示从袋中随机取球 2 次且每次取的都是红球，

$\therefore P(\xi=2)=\frac{C_4^2}{C_5^2}\times\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{1}{5}$，即 $\xi=2$ 的概率为 $\frac{1}{5}$.

（2）由题意知随机变量 ξ 的所有可能取值为 2,3,4，由（1）知 $P(\xi=2)=\frac{1}{5}$.

又 $\therefore P(\xi=4)=\frac{C_4^1C_1^1}{C_5^2}\times\frac{C_3^1C_1^1}{C_4^2}\times\frac{C_2^1C_1^1}{C_3^2}\times\frac{C_1^1C_1^1}{C_2^2}=\frac{2}{15}$,

$\therefore P(\xi=3)=1-\frac{1}{5}-\frac{2}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

$\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	2	3	4
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$

$\therefore E\xi=2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{3}+4\times\frac{2}{15}=\frac{44}{15}$.

第五章　圆锥曲线

【模拟演练】

题型一：中点问题

例、【解答】解：(1) 设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，将 $y=\frac{x^2}{4}$ 与 $y=kx+a$ 联立可得 $x^2-4kx-4a=0$，

则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4a$，

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2a=4k^2+2a$，$y_1y_2=(kx_1+a)(kx_2+a)=a^2$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-4a+a^2=0$，解得 $a=4$（$a=0$ 舍去）。

（2）由题意，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-4a+a^2=-4$，解得 $a=2$。

设 AB 的中点坐标为 $(x,\ y)$，则 $x=\frac{x_1+x_2}{2}=2k$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}=2k^2+2$，

消去 k，得到中点轨迹方程为 $x^2=2(y-2)$。

题型二：向量问题

例 1、【解答】解：（1）由题义长轴长为 4，即 $2a=4$，解得：$a=2$，

$\because$ 点 $(1,\dfrac{3}{2})$ 在椭圆上，$\therefore \dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4b^2}=1$ 解得：$b^2=3$

椭圆的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

（2）由直线 l 与圆 O 相切，得：$\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,即:$m^2=1+k^2$

设 $A(x_1，y_1)B(x_2，y_2)$ 由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=kx+m\end{cases}$ 消去y，

整理得：$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}$，

$\therefore y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=k^2\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}+km(-\dfrac{8km}{3+4k^2})+m^2=\dfrac{3m^2-12k^2}{3+4k^2}$

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}+\dfrac{3m^2-12k^2}{3+4k^2}=\dfrac{7m^2-12k^2-12}{3+4k^2}$

$\because m^2=1+k^2$ $\therefore x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{-5-5k^2}{3+4k^2}=-\dfrac{3}{2}$，解得：$k^2=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore k$的值为$:\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例 2、【解答】解：（Ⅰ）将直线 l 的方程 $y=kx+1$ 代入双曲线 C 的方程 $2x^2-y^2=1$ 后，整理得 $(k^2-2)x^2+2kx+2=0$．①

依题意，直线 l 与双曲线 C 的右支交于不同两点，故

$$\begin{cases}k^2-2\neq 0\\ \Delta=(2k)^2-8(k^2-2)>0\\ -\dfrac{2k}{k^2-2}>0\\ \dfrac{2}{k^2-2}>0.\end{cases}$$

解得 k 的取值范围是 $-2<k<-\sqrt{2}$．

（Ⅱ）设 A、B 两点的坐标分别为 $(x_1，y_1)$、$(x_2，y_2)$，则由①式得 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{2k}{2-k^2}\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{2}{k^2-2}.\end{cases}$ ②

假设存在实数 k，使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 $F(c,0)$．

则由 $FA\perp FB$ 得：$(x_1-c)(x_2-c)+y_1y_2=0$．

即 $(x_1-c)(x_2-c)+(kx_1+1)(kx_2+1)=0$．

整理得 $(k^2+1)x_1x_2+(k-c)(x_1+x_2)+c^2+1=0$．③

把②式及 $c=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 代入③式化简得 $5k^2+2\sqrt{6}k-6=0$．

解得 $k=-\dfrac{6+\sqrt{6}}{5}$ 或 $k=\dfrac{6-\sqrt{6}}{5}\notin\left(-2,-\sqrt{2}\right)$(舍去)

可知 $k=-\dfrac{6+\sqrt{6}}{5}$ 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点.

题型三：交点问题

例、【解答】 解：(1) 设 $P(x,y)$，由题知：$\dfrac{y}{x+2}\cdot\dfrac{y}{x-2}=-\dfrac{3}{4}$.

化简得：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(y\neq 0)$.

(2) 依题意可知直线 l 的斜率不为 0，

则设直线 l 的方程为：$x=my-1$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my-1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

则△ >0 恒成立，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$，$y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^3+4}$，

则 $x_1x_2=(my_1-1)(my_2-1)=\dfrac{-12m^2+4}{3m^2+4}$，$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=\dfrac{-8}{3m^2+4}$.

由题意可得：$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，

即 $x_1x_2-(x_1+x_2)+1+y_1y_2=0$，

$\therefore 7-9m^2=0$，解得：$m=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ 或 $m=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

$\therefore$ 直线 l 的方程为：$3x\pm\sqrt{7}y+1=0$.

题型四：面积问题

例 1、注：题目中的“$\angle F_1PF_2=120^o$”改为“$\angle F_1PF_2=60^o$”。

【解答】 解：(1) 设所求的椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$

由已知得 $|F_1F_2|=2$，$\therefore|PF_1|+|PF_2|=4=2a$，

$\therefore a=2$，$b^2=a^2-c^2=4-1=3$

$\therefore$此椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

（2）在$\triangle PF_1F_2$中，$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，

由余弦定理得$4=m^2+n^2-2mn\cos 60^\circ$，

$\therefore 4=(m+n)^2-2mn-2mn\cos 60^\circ=16-3mn$，$\therefore mn=4$，

$\therefore\triangle PF_1F_2$的面积$S=\dfrac{1}{2}mn\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$．

例 2、【解答】解：（1）椭圆的中心在坐标原点，一个焦点坐标是$F_1(0,-1)$，

即有$c=1$，且离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即有$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

解得，$a=\sqrt{3}$，则$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$，

则椭圆方程为$\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{x^2}{2}=1$；

（2）设直线AB的方程为：$y=kx-1$，

联立椭圆方程，消去y，得，$(3+2k^2)x^2-4kx-4=0$，

$x_1+x_2=\dfrac{4k}{3+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-4}{3+2k^2}$，

则$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\dfrac{16k^2}{(3+2k^2)^2}+\dfrac{16}{3+2k^2}}=4\sqrt{3}\bullet\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{3+2k^2}$，令$t=\sqrt{1+k^2}\,(t\geqslant 1)$，

则$|x_1-x_2|=4\sqrt{3}\bullet\dfrac{t}{1+2t^2}=4\sqrt{3}\bullet\dfrac{1}{2t+\dfrac{1}{t}}$，

$(2t+\dfrac{1}{t})'=2-\dfrac{1}{t^2}>0$在$t\geqslant 1$成立，即有$2t+\dfrac{1}{t}\geqslant 3$，

则有$|x_1-x_2|$的范围是$(0,\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3}]$．

则$S_{\triangle ABF_2}=\dfrac{1}{2}|x_1-x_2|\times 2c=|x_1-x_2|$，

即有$S_{\triangle ABF_2}$的取值范围是$(0,\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3}]$．

第六章　数列

【模拟演练】

题型一：裂项相消求和法

例、【解答】解：（1）（法一）$\because \{a_n\}$为等差数列，，

$\therefore S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\times 2 = n^2 + (a_1 - 1)n$

又由已知 $S_n = pn^2 + 2n$，$\therefore p = 1$，$a_1 - 1 = 2$，$\therefore a_1 = 3$，

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 2n+1$

$\therefore p = 1$，$a_n = 2n+1$；

（法二）由已知 $a_1 = S_1 = p+2$，$S_2 = 4p+4$，即 $a_1 + a_2 = 4p+4$，$\therefore a_2 = 3p+2$，

又此等差数列的公差为 2，$\therefore a_2 - a_1 = 2$，$\therefore 2p = 2$，$\therefore p = 1$，

$\therefore a_1 = p+2 = 3$，$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 2n+1$，

$\therefore p = 1$，$a_n = 2n+1$；

（法三）由已知 $a_1 = S_1 = p+2$，

$\therefore$当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = pn^2 + 2n - [p(n-1)^2 + 2(n-1)] = 2pn - p + 2$

$\therefore a_2 = 3p+2$，

由已知 $a_2 - a_1 = 2$，$\therefore 2p = 2$，$\therefore p = 1$，$\therefore a_1 = p+2 = 3$，

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 2n+1$，

$\therefore p = 1$，$a_n = 2n+1$；

（2）由（1）知 $b_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$

$\therefore T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = (1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) + (\frac{1}{5}-\frac{1}{7}) + \ldots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$

$\because T_n > \frac{9}{10}$

$\therefore \frac{2n}{2n+1} > \frac{9}{10}$，解得 $n > \frac{9}{2}$　又$\because n \in N_+$

$\therefore n = 5$

题型二：分组求和法

例、【解答】解：由题意知，$2^{a_n} = 2^{a_1}\cdot 4^{n-1} = 2^{a_1+2(n-1)}$，

所以 $a_n = a_1 + 2(n-1)$，即数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，

因为 a_2，a_4，a_7 成等比数列，所以 $a_2\cdot a_7=a_4^2$，即 $(a_1+2)\cdot(a_1+12)=(a_1+6)^2$，解得 $a_1=6$，

所以 $a_n=6+2(n-1)=2n+4$，

因为 b_n 是 1 和 S_n 的等差中项，所以 $2b_n=1+S_n$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$2b_{n-1}=1+S_{n-1}$，

两式相减得，$2b_n-2b_{n-1}=S_n-S_{n-1}=b_n$，即 $b_n=2b_{n-1}(n\geqslant 2)$，

在 $2b_n=1+S_n$ 中，令 $n=1$，则 $2b_1=1+b_1$，所以 $b_1=1$，

故数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，所以 $b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$，

因为 $c_n=\begin{cases}a_n, n\text{为奇数}\\ b_n, n\text{为偶数}\end{cases}=\begin{cases}2n+4, & n\text{为奇数}\\ 2^{n-1}, & n\text{为偶数}\end{cases}$，

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n-1$ 项和为 $(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n-1})+(b_2+b_4+b_6+\ldots+b_{2n-2})$

$=[6+10+14+\ldots+2(2n-1)+4]+(2+2^3+2^5+\ldots+2^{2n-3})$

$=\dfrac{[6+(4n+2)]\cdot n}{2}+\dfrac{2(1-4^{n-1})}{1-4}$

$=2n^2+4n+\dfrac{2}{3}(4^{n-1}-1)$．

题型三：错位相减求和法

例 1、【解答】 解：（1）$n=1$ 时，$a_1=S_1=2a_1-2$，解得 $a_1=2$；

$n\geqslant 2$ 时，$S_n=2a_n-2$ ①，

$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$ ②，

①－②得，$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，

所以，$a_n=2a_{n-1}$

所以 $\{a_n\}$ 为等比数列，

$a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$．

（2）$b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n$，$c_n=a_n\cdot(b_n+1)=2^n\cdot(n+1)$．

$T_n=c_1+c_2+c_3+\ldots\ldots+c_n$

$=2\times2+3\times2^2+4\times2^3\ldots\ldots\quad+(n+1)\cdot2^n$，

$2T_n=2\times2^2+3\times2^3+\ldots\ldots\quad+n\cdot2^n+(n+1)\cdot2^{n+1}$，

上式减下式得：

$-T_n=2\times2+2^2+2^3+\ldots\ldots\quad+2^n-(n+1)\cdot2^{n+1}$

$=2+\dfrac{2\times(1-2^n)}{1-2}-(n+1)\cdot2^{n+1}$

$=-n\cdot2^{n+1}$

所以 $T_n=n\cdot2^{n+1}$.

例 2、【解答】解：（1）$\because a_{n+1}=(1+\dfrac{1}{n})a_n+\dfrac{n+1}{2^n}$

$\therefore a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n+\dfrac{n+1}{2^n}$

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{1}{2^n}$

又 $\because b_n=\dfrac{a_n}{n}$，$\therefore b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{2^n}$，

累加法可得

$(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+(b_4-b_3)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$

又由 $a_1=1$，得 $b_1=1$，$\therefore b_n=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

（2）由（1）知 $a_n=2n-\dfrac{n}{2^{n-1}}$，设数列 $\left\{\dfrac{n}{2^{n-1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，

则 $T_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-2}}+\dfrac{n}{2^{n-1}}$①

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$②

①−② 可得 $\dfrac{1}{2}T_n=1+\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$

$\therefore T_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{(2+2n)n}{2}-4+\dfrac{n+2}{2^{n-1}}=n^2+n-4+\dfrac{n+2}{2^{n-1}},n\in N^*$.