22 届小数刷题班主干讲义——参考答案

小题答案

一、平面向量

1、$\frac{1}{2}$　2、D　3、$\frac{1}{2}$　4、A　5、$\left(-\infty,-\frac{9}{2}\right)\cup\left(-\frac{9}{2},3\right)$

6、C　7、C　8、B

二、不等式

1、D　2、$(-2,-1)\cup(2,+\infty)$　3、$[0,2]$　4、-1

5、6　6、$(-\infty,9]$　7、2　8、4

9、4　10、$\left[\frac{1}{5},+\infty\right)$　11、$\left(-\infty,\frac{6}{7}\right)$　12、$(-\infty,-1)$

13、$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$　14、$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

三、函数

1、B　2、$\left(0,\frac{3}{4}\right]$　3、$y=3x+\frac{1}{4}$ 或 $y=-3x-\frac{1}{2}$　4、18，$-\frac{49}{4}$

5、C　6、C　7、$[-3,1]$　8、$(-\infty,1]$　9、D

10、D　11、B　12、$\frac{1}{24}$　13、-8　14、D　15、A

四、数列

1、B　2、D　3、$-\frac{1}{2}$　4、$\frac{19}{41}$　5、130

6、9　7、D　8、A　9、C　10、A

五、三角函数

1、$-\frac{1}{2}$　2、44.5　3、D　4、A　5、D

6、C　7、$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　8、$\frac{\pi}{2}$　9、C　10、C

11、B　12、B　13、D　14、A　15、D

六、概率与统计

1、D　2、B　3、B　4、11　5、B　6、A

7、$\frac{2}{3}$　8、0.648　9、C　10、D　11、80

七、极限

1、（1）1　（2）$\frac{3}{4}$　（3）1　（4）e^{-6}　（5）$-\frac{\pi}{2}$　（6）1

（7）$\frac{1}{2}$　（8）e　（9）极限不存在

2、0　3、-1或1　4、$-\frac{5}{2}$　5、-1

八、积分

1、（1）$\frac{20}{3}$　（2）$\frac{1}{6}$　（3）$\frac{\pi^2}{8}+1$　（4）$\frac{\pi}{2}$

2、A　3、$\frac{\pi}{4}$　4、D　5、C　6、$\frac{1}{3}$　7、A

九、平面解析几何

1、$[3,+\infty)\cup\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]$　2、B　3、$3x+4y+14=0$或$3x+4y-6=0$

4、B　5、C　6、A　7、D　8、A

解答题答案

一、应用题

1、解：设有x间房供他们住，则有学生$(4x+20)$人

依题意，可得$\begin{cases}4x+20-8(x-1)>0\\4x+20-8(x-1)<8\end{cases}$，解得：$5<x<7$

所以$x=6$，则旅行团共有44人。

2、解：设火车速度为x m/s，火车长为y m

依题意，可得$\begin{cases}60x=1000+y\\40x=1000-y\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=20\\y=200\end{cases}$

3、解：设甲、乙两城市间的路程是$x\,\text{km}$

依题意，可得$\frac{x}{80}-\frac{x}{100}=3$，解得：$x=1200$

4、解：设这所厂办学校的总经费是x万元

依题意，可得$\frac{2}{7}x+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{7}x+1.6\right)+1.6=x$，解得：$x=4.2$

5、解：甲、乙工效之和为$\frac{1}{10}$，两队合作 4 天，完成了$\frac{1}{10}\times4=\frac{2}{5}$，还剩下$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$没完成。

甲还需要 21 天完成，甲的工效为$\frac{3}{5}\div21=\frac{1}{35}$，

那么乙单独完成的时间为$1\div(\frac{1}{10}-\frac{1}{35})=14$（天）。

所以这项任务甲单独完成需 35 天，乙单独完成需 14 天。

6、解：由题意可得甲乙丙的工作效率分别是$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{15}$，所以三个人搬完两个仓库需要$2\div\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)=8$小时，则甲完成了一个仓库的$\frac{1}{10}\times8=\frac{4}{5}$，所以丙完成了这个仓库的$1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$，用了$\frac{1}{5}\div\frac{1}{15}=3$小时，因此丙帮甲搬了 3 小时。

7、解：设原水流速度为x千米/时，甲、乙两港相距y千米。

依题意，可得$\frac{8-x}{8+x}=\frac{1}{2}$，解得：$x=\frac{8}{3}$

所以$\frac{y}{8+2\times\frac{8}{3}}+\frac{y}{8-2\times\frac{8}{3}}=9$，解得：$y=20$

8、解：由题意知乙车的速度：$40\times\frac{7}{8}=35$（千米/小时）；再返回时如果甲的速度不变，则甲乙用时是相等的，甲返回时速度提高了 25%，时间也提前了总时间的$\frac{1}{5}$，所以总时间为$\frac{4}{5}\div\frac{1}{5}=4$（小时），甲乙两地路程为$(40+35)\times4=300$（千米）。

二、平面几何

1、$\because$在矩形$ABCD$中，$BC=\sqrt{3}AB$，

$\therefore\angle OBE=30^\circ$，$\angle AOB=60^\circ$，

$\therefore \angle AOF + \angle FOB = \angle FOB + \angle BOE = 60°$，

$\therefore \angle AOF = \angle BOE$，

$\because OA = OB$， $OF = OE$，

$\therefore \triangle OAF \cong \triangle OBE$，

$\therefore \angle OAF = \angle OBE = 30°$，

$\therefore \angle OAF$ 为定值。

2、（1）证明：过点 O 作 $OF \perp AC$，垂足为 F

因为 BC 是角 A 的平分线，所以 $\angle BAD = \angle FAD$

又因为 $AD = AD$， $\angle ABD = \angle AFD = 90°$，所以 $\triangle ABD \cong \triangle AFD$

所以 $OB = OF$，所以 AC 是切线

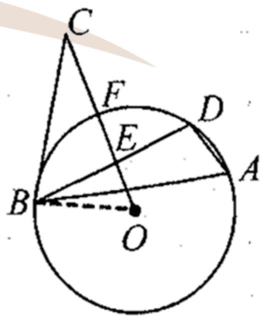
（2）因为 $OB = OF$， $DE = DC$， $\angle EBD = \angle CFD = 90°$，

所以 $\triangle EBD \cong \triangle CFD$，所以 $BE = FC$

又因为 $\triangle ABD \cong \triangle AFD$，

所以 $AB = AF$，所以 $AB + EB = AF + FC = AC$

3、（1）如图，连接 OB，因为点 E 是弦 BD 的中点，



所以 $BD \perp OC$，$BF = DF$，$BE = \frac{1}{2}BD$，所以 $\triangle BEC$ 为直角三角形，

所以 $\angle C + \angle DBC = 90°$，又因为 $BF = DF$，所以 $\angle A = \angle BOC$，

又 $\angle A = \angle DBC$，所以 $\angle BOC = \angle DBC$，即 $\angle C + \angle BOC = 90°$，

所以 $\angle CBO = 180° - (\angle C + \angle BOC) = 90°$，所以 $OB \perp BC$，即 BC 与圆 O 相切。

（2）在 $Rt\triangle OBC$ 中，$BO = 3$，$BC = 4$，所以 $OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = 5$。

又 $S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2}OB \cdot BC = \frac{1}{2}OC \cdot BE$，所以 $BE = \frac{12}{5}$，又 $BE = \frac{1}{2}BD$， $BD = \frac{24}{5}$。

4、（1） $BC = 10$

（2） $\frac{10-2t}{7} = \frac{t}{5}$

（3）当 $MN = MC$ 时， $\cos C = \frac{\frac{10-2t}{2}}{t} = \frac{3}{5}$，所以 $t = \frac{25}{8}$

当 $MN = MC$ 时， $\cos C = \frac{\frac{t}{2}}{10-2t} = \frac{3}{5}$，所以 $t = \frac{60}{17}$

当 $CN=CM$ 时，$10-2t=t$，所以 $t=\frac{10}{3}$

三、数列

1、（1）证明：$a_{n+1}=2a_n+4$，所以 $a_{n+1}+4=2(a_n+4)$ 即可得出

（2）由（1）可得，$a_n=2^n-4$，当 $n=1$ 时，$a_1=-2$，当 $n\geq 2$ 时，$S_n=-a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2+(2^2-4)+(2^3-4)+\cdots+(2^n-4)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-4(n-1)=2^{n+1}-4n+2$

所以 $S_n=2^{n+1}-4n+2$

2、（1）$a_5\geq 0$，$a_6\leq 0$，则 $9+4d\geq 0$，$9+5d\leq 0$，解得 $-\frac{9}{4}\leq d\leq -\frac{9}{5}$，$d$ 为正数，所以 $d=-2$

（2）$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(11-2n)(9-2n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9-2n}-\frac{1}{11-2n}\right)$，所以 $T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9-2n}-\frac{1}{9}\right)$，令 $b_n=\frac{1}{9-2n}$，$b_n\leq b_4=1$，所以 $T_n\leq\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{9}$

3、（1）因为 $2a_n\cdot a_{n+1}+a_{n+1}-a_n=0$，所以 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_{n+1}}$，$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{2a_n+1}{a_n}-\frac{1}{a_n}=2$，所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 1 为首项，以 2 为公差的等差数列，故 $\frac{1}{a_n}=2n-1$，所以 $a_n=\frac{1}{2n-1}$

（2）由（1）得 $b_n=\frac{2n-1}{2^n}$，可由错位相减求得 $S_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$，因为 $S_{n+1}-S_n=\frac{2n+1}{2^{n+1}}>0$，所以数列 $\{S_n\}$ 是递增数列，所以 $S_n\geq S_1=\frac{1}{2}>\frac{3}{8}$，所以不存在

4、（1）$S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$，当 $n\geq 2$ 时，$S_{n+1}-S_n=a_n=n$，所以 $a_n=n$

（2）$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，根据裂项相消，所以 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$，

又因为 $T_{n+1}-T_n=\frac{1}{(n+1)(n+3)}>0$，所以数列 $\{T_n\}$ 是递增数列，所以 $(T_n)_{\min}=T_1=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{1}{3}>\frac{1}{3}\log_a(1-a)$，因为 $1-a>0$，所以 $0<a<1$，所以 $1-a>a$，即 $0<a<\frac{1}{2}$

四、三角函数

1、（1）∵$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-3\sin^2x-\cos^2x+2=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2x+1$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

∵$x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，∴$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}\right]$，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},\ 1\right]$，

∴$f(x)$在$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的值域是$[-1, 2]$.

（2）∵$\sin[A+(A+C)]=2\sin A+2\sin A\cos(A+C)$，

即$\sin A\cos(A+C)+\cos A\sin(A+C)=2\sin A+2\sin A\cos(A+C)$，

化简可得$\sin C=2\sin A$，

由正弦定理可得$c=2a$，

∵$b=\sqrt{3}a$，∴$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+4a^2-3a^2}{2a\cdot 2a}=\frac{1}{2}$，

∵$0<B<\pi$，∴$B=\frac{\pi}{3}$.

∴$f(B)=1$.

2、（1）因为$a\sin B=b(-1+\sqrt{3}\cos A)$，

所以由正弦定理可得$\sin A\sin B=\sin B(-1+\sqrt{3}\cos A)$，

因为$\sin B\neq 0$，

所以$\sin A=-1+\sqrt{3}\cos A$，可得$\cos(A+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，

因为$A\in(0,\pi)$，$A+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$，

所以$A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，可得$A=\frac{\pi}{6}$.

（2）因为ΔABC的面积等于$2=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{4}bc$，

所以可得$bc=8$，

又$a=4-\sqrt{3}$，

利用余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，可得

$(4-\sqrt{3})^2=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A=(b+c)^2-16-2\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$b+c=\sqrt{35}$，

所以$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{b+c}{bc}=\frac{\sqrt{35}}{8}$.

3、（1）∵$b\cos A\sin B+a\cos B\sin B=-\sqrt{3}b\cos C$，

由正弦定理得$\sin B\cos A\sin B+\sin A\cos B\sin B=-\sqrt{3}\sin B\cos C$，

∵$\sin B\neq 0$，

∴$\cos A\sin B+\sin A\cos B=-\sqrt{3}\cos C$，

∴$\sin(A+B)=-\sqrt{3}\cos C$，

$\therefore \sin C=-\sqrt{3}\cos C$，

$\therefore \tan C=-\sqrt{3}$，

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$.

（2）$\because \frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2$，

由正弦定理可得 $a=2\sin A$，$b=2\sin B$，

$\therefore a+b=2\sin A+2\sin B=2[\sin A+\sin(\frac{\pi}{3}-A)]=2(\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A)=2\sin(A+\frac{\pi}{3})$，

$\because 0<A<\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore$ 当 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 即，$A=\frac{\pi}{6}$ 时，$\sin(A+\frac{\pi}{3})_{max}=1$，

$\therefore (a+b)_{max}=2$，

$\therefore \Delta ABC$ 的周长 $L=a+b+c$ 的最大值为 $2+\sqrt{3}$.

4、（1）因为 $a\sin B=(b\sin B-\sqrt{3}b\cos B)\cos C$，

所以 $\sin A\sin B=(\sin B\sin B-\sqrt{3}\sin B\cos B)\cos C$，

因为 $\sin B\neq 0$，

所以 $\sin A=(\sin B-\sqrt{3}\cos B)\cos C$，

所以 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin B\cos C-\sqrt{3}\cos B\cos C$，

整理可得 $\cos B(\sin C+\sqrt{3}\cos C)=0$，

因为 $B\neq\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos B\neq 0$，

可得 $\tan C=-\sqrt{3}$，可得 $C=\frac{2\pi}{3}$，

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，可得 $c^2=25+9-2\times5\times3\times(-\frac{1}{2})=49$，

所以 $c=7$.

（2）设 AB 边上的中线为 CD，则 $2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$，

所以 $4\overrightarrow{CD}^2=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2=b^2+a^2+2ab\cos C$，

所以 $49=9+a^2-3a$，即 $a^2-3a-40=0$，解得 $a=8$，或 -5（舍去），

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 8\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

五、概率统计

1、（1）$\bar{x}=89$，$P(A)=\frac{C_5^1C_3^1+C_5^2}{C_8^2}=\frac{25}{28}$

（2）X 的可能取值为 1，2，3，4

$P(X=1)=\frac{C_5^1C_3^3}{C_8^4}=\frac{5}{70}$，$P(X=2)=\frac{C_5^2C_3^2}{C_8^4}=\frac{30}{70}$，$P(X=3)=\frac{C_5^3C_3^1}{C_8^4}=\frac{30}{70}$，

$P(X=4)=\frac{C_5^4}{C_8^4}=\frac{5}{70}$

2、（1）$P(\xi=2)=\frac{C_4^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{1}{5}$

（2）$P(\xi=2)=\frac{C_4^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{1}{5}$，$P(\xi=4)=\frac{C_4^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_4^2}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^2}\cdot\frac{C_1^1}{C_2^2}=\frac{2}{15}$，

$P(\xi=3)=1-P(\xi=2)-P(\xi=4)=\frac{2}{3}$

六、圆锥曲线

1、（1）设 $Q(x，y)$ 为曲线 C 上任意一点，

因为曲线 C 上的点 $Q(x，y)$ 到点 $F(0, 1)$ 的距离比它到直线 $y=-3$ 的距离小 2，

所以点 Q 到点 F 的距离等于它到直线 $y=-1$ 的距离，

所以曲线 C 是以 F 为焦点，直线 $y=-1$ 为准线的抛物线，其方程为 $x^2=4y$。

（2）依题意，知直线 l 的方程为 $y=kx+1$，代入 $x^2=4y$，

得 $x^2-4kx-4=0$，$\Delta=(-4k)^2+16>0$。

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1\cdot x_2=-4$，

①因为$\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BA}$，所以$(-x_2,1-y_2)=\lambda(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$，所以$\frac{x_1}{x_2}=1-\frac{1}{\lambda}$，

$\frac{16k^2}{-4}=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{x_1}{x_2}+2+\frac{x_2}{x_1}=1-\frac{1}{\lambda}+2+\frac{\lambda}{\lambda-1}$，即$4k^2+2=\frac{1}{\lambda}-1+\frac{1}{\frac{1}{\lambda}-1}$，

因为$\lambda\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$，所以$\frac{1}{\lambda}-1\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，

又函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调递减，所以$4k^2+2\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$，即$-\frac{\sqrt{2}}{4}\le k\le\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以k的取值范围是$\left[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$。

2、（1）由题意得$a=2$，$b=1$，

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

又$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，所以离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）证明：设$P(x_0，y_0)(x_0<0，y_0<0)$，则$x_0^2+4y_0^2=4$.

又$A(2，0)$，$B(0，1)$，

所以直线PA的方程为$y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$.

令$x=0$，得$y_M=-\frac{2y_0}{x_0-2}$，从而$|BM|=1-y_M=1+\frac{2y_0}{x_0-2}$.

直线PB的方程为$y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1$.

令$y=0$，得$x_N=-\frac{x_0}{y_0-1}$，从而$|AN|=2-x_N=2+\frac{x_0}{y_0-1}$.

所以四边形$ABNM$的面积$S=\frac{1}{2}|AN|\cdot|BM|$

$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{x_0}{y_0-1}\right)\left(1+\frac{2y_0}{x_0-2}\right)$

$=\frac{x_0^2+4y_0^2+4x_0y_0-4x_0-8y_0+4}{2（x_0y_0-x_0-2y_0+2）}$

$=\frac{2x_0y_0-2x_0-4y_0+4}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}=2$.

从而四边形$ABNM$的面积为定值.

3、（1）依题意有$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，$c-\frac{a^2}{c}=\frac{3}{2}$，

$\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore c=2a$，

$\therefore a=1$，$c=2$，$\therefore b^2=3$，

∴双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

（2）证明：设直线 l 的方程为 $y=x+m(m>0)$，$B(x_1，x_1+m)$，$D(x_2，x_2+m)$，BD 的中点为 M，由 $\begin{cases} y=x+m, \\ x^2-\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $2x^2-2mx-m^2-3=0$，

∴$x_1+x_2=m$，$x_1x_2=-\frac{m^2+3}{2}$，

又∵ $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BF}=1$，即 $(2-x_1)(2-x_2)+(x_1+m)(x_2+m)=1$，

∴$m=0$(舍)或 $m=2$，

∴$x_1+x_2=2$，$x_1x_2=-\frac{7}{2}$，M 点的横坐标为 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$，

∵ $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BA}=(1-x_1)(1-x_2)+(x_1+2)(x_2+2)=5+2x_1x_2+x_1+x_2=5-7+2=0$，

∴$AD\perp AB$，∴过 A，B，D 三点的圆以点 M 为圆心，BD 为直径，

∵点 M 的横坐标为 1，∴$MA\perp x$ 轴，

∴过 A，B，D 三点的圆与 x 轴相切.

4、（1） $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$

（2）椭圆的右焦点 F 的坐标为 $(2,0)$，设线段 MN 的中点为 $Q(x_0，y_0)$，由三角形重心的性质知 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FQ}$，又 $B(0,4)$，所以 $(2,-4)=2(x_0-2，y_0)$，故得 Q 的坐标为 $(3,-2)$，

设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，则 $x_1+x_2=6$，$y_1+y_2=-4$，且 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{20}+\frac{y_1^2}{16}=1 \\ \frac{x_2^2}{20}+\frac{y_2^2}{16}=1 \end{cases}$，两式相减得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{20}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{16}=0$，所以 $k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{4}{5}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{6}{5}$，故直线方程为 $6x-5y-28=0$。

七、导函数

1、（1） $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+4x+1$，$f'(x)=x^2-2ax+4$，

∵ $f(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上单调递增，

∴ $f'(x)=x^2-2ax+4\geq 0$ 在 $(1,3)$ 上恒成立，

等价于 $a\leq\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}$ 在 $(1,3)$ 上恒成立，

$\because \frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}}=2$，当且仅当$\frac{x}{2}=\frac{2}{x}$即$x=2$时等号成立，

$\therefore a\leq 2$，

$\therefore a$的取值范围为$(-\infty,2]$。

（2）$f'(x)=x^2-2ax+4$，$\Delta=4(a^2-4)$，

①当$\Delta\leq 0$，$-2\leq a\leq 2$时，$f'(x)\geq 0$恒成立，即$f(x)$在R上单调递增，无极值点；

②当$\Delta>0$，$a<-2$或$a>2$时，$f'(x)=0\Rightarrow x_1=a-\sqrt{a^2-4}$，$x_2=a+\sqrt{a^2-4}$（$x_1<x_2$），

$\therefore$当$x\in\left(-\infty，a-\sqrt{a^2-4}\right)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；$x\in\left(a-\sqrt{a^2-4}，a+\sqrt{a^2-4}\right)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in\left(a+\sqrt{a^2-4},+\infty\right)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增。

$\therefore f(x)$的极大值点为$a-\sqrt{a^2-4}$。

综上所述，$-2\leq a\leq 2$，$f(x)$无极大值点；

$a<-2$或$a>2$，$f(x)$有一个极大值点$a-\sqrt{a^2-4}$。

2、（1）∵$h(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，

$h'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-2=-\frac{2x^2-3x+1}{x^2}=-\frac{(2x-1)(x-1)}{x^2}$，

∴$h(x)$的单调递减区间是$(0,\frac{1}{2})$和$(1，+\infty)$.

（2）问题等价于$a\ln x=\frac{1}{x}$有唯一的实根，

显然$a\neq 0$，则关于x的方程$x\ln x=\frac{1}{a}$有唯一的实根，

构造函数$\varphi(x)=x\ln x$，则$\varphi'(x)=1+\ln x$，

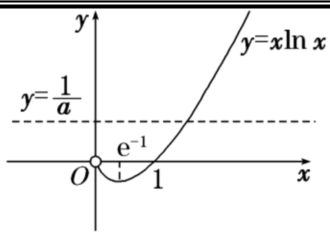
由$\varphi'(x)=1+\ln x=0$，得$x=e^{-1}$，

当$0<x<e^{-1}$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减，

当$x>e^{-1}$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增，

∴$\varphi(x)$的极小值为$\varphi(e^{-1})=-e^{-1}$.

如图，作出函数$\varphi(x)$的大致图象，



则要使方程 $x\ln x=\frac{1}{a}$有唯一的实根，

只需直线 $y=\frac{1}{a}$与曲线 $y=\varphi(x)$有唯一的交点，则$\frac{1}{a}=-e^{-1}$或$\frac{1}{a}>0$，

解得 $a=-e$ 或 $a>0$，

故实数 a 的取值范围是$\{-e\}\cup(0,+\infty)$.

3、（1） $f'(x)=2x-(2+a)+\frac{a}{x}=\frac{2x^2-(2+a)x+a}{x}$，令 $g(x)=2x^2-(2+a)x+a$，

$\Delta=a^2-4a+4=(a-2)^2\geq 0$

①当 $a=2$ 时， $f'(x)\geq 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 恒增，

② $a\neq 2$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=\frac{a}{2}$， $x_2=1$，

当 $0<a<2$ 时， $f(x)$在$\left(0,\frac{a}{2}\right)$单调递增，在$\left[\frac{a}{2},1\right]$单调递减，$(1,+\infty)$单调递增

当 $a\leq 0$ 时， $f(x)$在$(0,1]$单调递减，$(1,+\infty)$单调递增

当 $a>2$ 时， $f(x)$在$(0,1)$单调递增，在$\left[1,\frac{a}{2}\right]$单调递减，$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$单调递增

（2）由（1）可知，当 $a\in[4,8]$时， $f(x)$在 $x\in[1,2]$单调递减，

所以 $ma>f(x)_{\max}+3=f(1)+3=2-a$，即 $ma>2-a$，

所以 $m>\frac{2-a}{a}=-1+\frac{2}{a}$，所以 $m>-\frac{1}{2}$.

4、（1） $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，

因为函数的单调递减区间是$(1,2)$，所以 $f'(x)=0$ 的两根分别为 1 和 2，

从 $f(0)=a^2=1$ 且 $a>0$，可得 $a=1$，

所以$\begin{cases}f'(1)=3+2b+c=0\\ f'(2)=12+4b+c=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}b=-\frac{9}{2}\\ c=6\end{cases}$，

所以 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+1$.

（2）由（1）知 $f'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$，

当 $x\in[2,+\infty)$ 时，$f'(x)\geq 0$，所以当 $x\in[2,+\infty)$ 时，$f(x)$ 恒增，$f(x)_{\min}=f(2)=3$，

要使不等式 $f(x)<\frac{1}{2}m^3-m\ln m-mt+3$ 在 $[2,+\infty)$ 上有解，

只需 $f(x)_{\min}<\frac{1}{2}m^3-m\ln m-mt+3$ 对任意 $m\in(0,2]$ 恒成立，

即 $3<\frac{1}{2}m^3-m\ln m-mt+3$，即 $t<\frac{1}{2}m^2-\ln m$，

设 $f(m)=\frac{1}{2}m^2-\ln m$，

可求 $f(m)_{\min}=\frac{1}{2}$，

所以 $t<\frac{1}{2}$．

故实数 t 的取值范围是 $(-\infty,\frac{1}{2})$．