集训中学数学　模拟试卷（一）

参考答案

第一部分　选择题

一、选择题

1.【答案】C。解析：由题意可知，$z=\dfrac{-1+7i}{1+i}=\dfrac{(-1+7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{6+8i}{2}=3+4i$，则 $\bar{z}=3-4i$，则 $|\bar{z}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$。故本题选 C。

2.【答案】C。解析：化简可得 $A=[-3,4]$，$B=(2m-1,\ m+1)$，$\because A\cap B=\phi$，$\therefore$ ① $B=\phi$，$2m-1\geq m+1\Rightarrow m\geq 2$；② $B\neq\phi\Rightarrow m<2$，有 $2m-1\geq 4$ 或 $m+1\leq -3$，得出 $\dfrac{5}{2}\leq m$ 或 $m\leq -4$。综上所述：$m\geq 2$ 或 $m\leq -4$。故本题选 C。

3.【答案】D。解析：求函数的最值，需要先判断函数的单调性。由已知函数求得该函数的导函数为 $f'(x)=6x^2-6x-12$，令 $f'(x)=0$ 求解得到 $x_1=-1$，$x_2=2$；即当 $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in[-1,2]$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减。所以当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(2)=-15$，$f(0)=5$，$f(3)=-4$。由此可得最大值与最小值之差为 20。故本题选 D。

4.【答案】C。解析：$(1+x)^6(1+y)^4$ 的展开算式中 x^3y^0 的系数是 $C_6^3C_4^0=20$，$f(3,0)=20$；同理可得 x^2y^1 的系数为 $C_6^2C_4^1=60$，$f(2,1)=60$；x^1y^2 的系数为 $C_6^1C_4^2=36$，$f(1,2)=36$；x^0y^3 的系数为 $C_6^0C_4^3=4$，$f(0,3)=4$。所以和为 120。故本题选 C。

5.【答案】B。解析：依题意，$x>0$，$y=x^2+\dfrac{3}{x}=x^2+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{3}{2x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\times\dfrac{3}{2x}\times\dfrac{3}{2x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{18}$，当且仅当 $x=\dfrac{\sqrt[3]{12}}{2}$ 时取等。故本题选 B。

6.【答案】C。解析：$\because\forall x\in[1,2]$，$ax^2-x+a>0$ 等价于 $\because\forall x\in[1,2]$，$a>\dfrac{x}{x^2+1}$ 恒成立，记 $h(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$，$h(x)=\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}\in\left[\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right]$，则 $a>\dfrac{1}{2}$，则 $a>\dfrac{1}{2}$ 成立的一个充分不必要

条件是 $a\geq 1$。故本题选 C。

7.【答案】B。解析：根据题意可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，$\therefore\begin{cases}0<a<1\\4a-1<0\\\log_a 1\geq(4a-1)\times 1+2a\end{cases}$，

解得 $0<a\leq\dfrac{1}{6}$。故本题选 B。

8.【答案】B。解析：三棱锥 $S-ABC$ 中，公共顶点 S 的三条棱两两相互垂直，且其长分别为 1、$\sqrt{6}$、3，三棱锥的四个顶点都在同一球面上，可得知三棱锥是长方体的一部分，因此可扩展为长方体，三棱锥的外接球与长方体的外接球相同，长方体的体对角线就是球的直径，这个直径 $d=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{6}\right)^2+3^2}=4$，半径为 2，则球的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32}{3}\pi$。故本题选 B。

9.【答案】B。解析：题干中通过取特殊值研究抽象函数的奇偶性，其中渗透了特殊和一般的思想。故本题选 B。

10.【答案】B。解析：根据《义务教育数学课程标准》总目标可知，发展合情推理和演绎推理能力，清晰地表达自己的想法属于落实数学思考目标。故本题选 B。

第二部分　非选择题

二、填空题

11.【答案】4。解析：因为平均数为 10，所以 $\dfrac{a+b+11+9+10}{5}=10$，所以 $a+b=20$；因为标准差为 $\sqrt{2}$，所以 $\sqrt{2}=\sqrt{\dfrac{1}{5}\left[(a-10)^2+(b-10)^2+(11-10)^2+(9-10)^2+(10-10)^2\right]}$，所以 $a^2+b^2=208$ 且 $ab=96$，所以 $|b-a|^2=b^2+a^2-2ab=16$，$|b-a|=4$。

12.【答案】-4。解析：$f(-1)<0$，$f(0)=1>0$，所以函数在 $(-1,0)$ 内有零点，且在区间 $(-1,0)$ 上，$f'(x)=1-x+x^2-\cdots+x^{2016}=\dfrac{1+x^{2017}}{1+x}>0$，函数单调递增，故只有一个零点，$f(x)$ 向左平移 4 个单位得到 $F(x)$，依题意，函数 $F(x)$ 所有零点都在区间 $(-5,-4)$ 之间，所以函数 $F(x)>0$ 的最小整数解为 -4。

13.【答案】归纳推理（填“合情推理”也可）。解析：由题意知是特殊到一般的归纳推理（合情推理）。

14.【答案】现实生活；数量关系。解析：《义务教育数学课程标准》提到，建立数感有助于

学生理解现实生活中数的意义，理解或表述具体情境中的数量关系。

15.【答案】情感态度；学习过程。解析：《义务教育数学课程标准》强调评价既要关注学生数学学习的结果，也要关注他们在学习过程中的变化和发展。既要关注数学学习的水平，也要关注学生的情感态度。

三、简答题

16.【参考答案】

（1）错因分析：①未考虑函数的定义域；② $x-1<0$，放入根号内后根号前应添负号。

（2）正确解法：非奇非偶函数，因为考虑 $f(x)$ 的定义域：

$\frac{1+x}{1-x}\geq 0 \Leftarrow \begin{cases}(1+x)(1-x)\geq 0\\ 1-x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow -1\leq x<1$，因为定义域不关于原点对称，所以此函数为非奇非偶函数。

相关建议：①学生是学习的主体，应该引导学生经历知识的发生、形成过程，强化概念的内化理解；

②通过丰富的变式练习，加深学生对知识的掌握；

③函数是较为抽象的知识，可结合多媒体设备，把握教学直观；

④在教学时，应充分地激活学生已有经验，明确知识联系，完善知识体系。

四、解答题

17.【参考答案】（1）见解析；（2）n 的最大值为 4。

（1）$\because S_n=-a_n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\left(n\in N^*\right)$，当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=-a_{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+2$，$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=-a_n+a_{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，化简可得 $2^n a_n=2^{n-1}a_{n-1}+1$，$\because b_n=2^n a_n$，则 $b_n=b_{n-1}+1$，令 $n=1$，可得 $S_1=-a_1-1+2=a_1$，即 $a_1=\frac{1}{2}$。又 $b_1=2a_1=1$，$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是首项和公差均为 1 的等差数列。于是 $b_n=1+(n-1)=n=2^n a_n$，$\therefore a_n=\frac{n}{2^n}$。

（2）$\because c_n=\log_2\frac{n}{a^n}=n$，$\therefore \frac{2}{c_n c_{n+2}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$，

$\therefore T_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，由 $T_n<\frac{25}{21}$，化简可得 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}>\frac{13}{42}$，$\because f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ 单调递减，$f(4)=\frac{11}{30}$，$f(5)=\frac{13}{42}$，$\therefore n$ 的最大值为 4。

18.【参考答案】（1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；（2）$-2<\lambda<2$。

（1）由已知得$\begin{cases}2c=2\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ c=1\end{cases}$，$\therefore b=1$，椭圆方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$。

（2）由$\begin{cases}y=kx+m\\ x^2+2y^2=2\end{cases}$，得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

$\Delta=16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-2)=8(1+2k^2-m^2)$，根据题意得$\Delta>0$，$\therefore 1+2k^2>m^2$，

设点$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}\\ x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}\end{cases}$，于是$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2m}{1+2k^2}$，

当$m=0$时，易知点AB关于原点对称，则$\lambda=0$；当$m\neq 0$，可知点AB不关于原点对称，则$\lambda\neq 0$。$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OQ}$，得$\begin{cases}x_Q=\frac{1}{\lambda}(x_1+x_2)\\ y_Q=\frac{1}{\lambda}(y_1+y_2)\end{cases}$，即$\begin{cases}x_Q=\frac{-4km}{\lambda(1+2k^2)}\\ y_Q=\frac{2m}{\lambda(1+2k^2)}\end{cases}$，$\because Q$点在椭圆上，

$\left[\frac{-4km}{\lambda(1+2k^2)}\right]^2+2\left[\frac{2m}{\lambda(1+2k^2)}\right]^2=2$，化简得$4m^2(1+2k^2)=\lambda^2(1+2k^2)^2$，$\because 1+2k^2\neq 0$，$\therefore$

$4m^2=\lambda^2(1+2k^2)$，$\because 1+2k^2>m^2$，可得$\lambda^2<4$，则$-2<\lambda<2$。

19.【参考答案】（1）$5ex-y-4e=0$；（2）见解析；（3）$m\in\left(-\frac{6}{e}-\frac{1}{6},-2\right)$。

（1）当$a=1$时，$f(x)=(x^2+2x-2)e^x$，$f'(x)=(x^2+4x)e^x$，曲线$f(x)$在点$(1,\ f(1))$处的切线斜率为$5e$，切点为$(1,\ e)$。即有切线方程为$y-e=5e(x-1)$，即为切线$5ex-y-4e=0$。

（2）$f'(x)=ax\left(x+\frac{2a+2}{2}\right)e^x$，令$f'(x)=0\Rightarrow x=0$或$x=-\frac{2a+2}{a}$。

①当$a=-1$时，$f'(x)\le 0$恒成立，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上递减，即$f(x)$的减区间为R。

②当$-1<a<0$时，$f(x)$在$(-\infty,0)$和$\left(-\frac{2a+2}{a},+\infty\right)$上递减，在$\left(0,-\frac{2a+2}{a}\right)$上递增，即$f(x)$的增区间为$\left(0,-\frac{2a+2}{a}\right)$，减区间为$(-\infty,0)$和$\left(-\frac{2a+2}{a},+\infty\right)$。

③当$a<-1$时，$f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{2a+2}{a}\right)$和$(0,+\infty)$上递减，在$\left(-\frac{2a+2}{a},0\right)$上递增，即

$f(x)$的增区间为$\left(-\frac{2a+2}{a},0\right)$，减区间为$\left(-\infty,-\frac{2a+2}{a}\right)$和$(0,+\infty)$。

（3）$a=-2$时，可得$f(x)-g(x)=\left(-2x^2+2x-2\right)e^x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-m$，原问题等价于$f(x)-g(x)$的图象与$x$轴有3个不同的交点，即$y=m$与$\left(-2x^2+2x-2\right)e^x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$的图象有3个不同的交点，令$F(x)=\left(-2x^2+2x-2\right)e^x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$，$F'(x)=-x(x+1)\left(2e^x+1\right)$，令$F'(x)=0$解得$x=0$，$x=-1$。当$x\in(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$时，$F'(x)<0$，$F(x)$在$(-\infty,-1)$和$(0,+\infty)$上递减；当$x\in(-1,0)$时，$F'(x)>0$，$F(x)$在$(-1,0)$上递增；所以$F(x)$在$x=-1$时取得极小值，$F(-1)=-\frac{6}{e}-\frac{1}{6}$，$F(x)$在$x=0$时取得极大值$F(0)=-2$，所以$m\in\left(-\frac{6}{e}-\frac{1}{6},-2\right)$。

20.【参考答案】（1）0；（2）$\left[\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{13}+\frac{5}{2},\frac{11}{4}\right]$。

（1）$\because f(x)=\sin x\cos x+1=\frac{1}{2}\sin 2x+1$，$\therefore$当函数$f(x)$取最大值时，$2x_0=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in Z)$，即$x_0=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in Z)$，$\therefore g\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=0$。

（2）根据题意得：

$$F(x)=\sin 2x+2+\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x+2+\frac{\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{5}{2},$$

当$x\in\left[\frac{\pi}{13},\frac{\pi}{12}\right]$时，$2x\in\left[\frac{2\pi}{13},\frac{\pi}{6}\right]$，函数$F(x)$单调递增，

$\therefore$函数$F(x)$的值域为$\left[\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{13}+\frac{5}{2},\frac{11}{4}\right]$。

闽试教育
MINSHI EDUCATION

五、综合应用

21.【参考答案】

（1）教学目标：

知识与技能目标：理解平面向量的坐标的概念，学会用坐标表示向量，能区分向量的坐标与点的坐标的不同。

过程与方法目标：学生通过在实践中探索、观察、反思、总结，从而达到培养学生的观察能力、归纳能力、思维能力的目的。

情感态度与价值观目标：培养学生勇于探索、善于研究的精神，挖掘其非智力因素资源，培养其良好的数学学习品质。

教学重点：学会用坐标表示向量。

教学难点：平面向量坐标表示的概念的建立。

（2）数学思想：数形结合思想，类比思想。

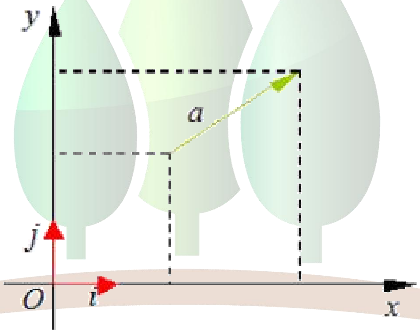
（3）教学过程：

（一）复习导入

复习平面向量的基本定理，什么是基底，什么条件下可以将任一向量$\vec{a}$进行分解等知识，既帮助学生整理、复习已学知识的结构，也让学生在复习过程中自己“发现”尚未解决的问题，使新授知识在原认知结构中找到生长点，自然地引出新问题，符合学生的认知规律，有利于学生形成合理、完善的认知结构。

（二）数形结合，讲解新课

如图，在直角坐标系内，分别取与x轴，y轴方向相同的两个单位向量$\vec{i}$，$\vec{j}$作为基底，任作一个向量$\vec{a}$，由平面向量基本定理知，有且只有一对实数x、y，使得



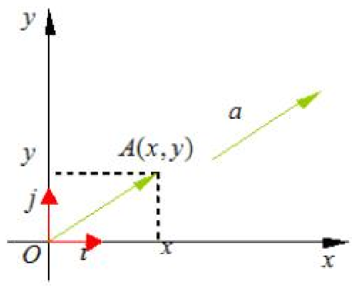
$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$　　　　　①

我们把叫作向量$\vec{a}$的（直角）坐标，记作

$\vec{a}=(x,\ y)$　　　　　②

其中x叫作$\vec{a}$在x轴上的坐标，y叫作$\vec{a}$在y轴上的坐标，②式叫作向量的坐标表示特别地，$\vec{i}=(1,0)$，$\vec{j}=(0,1)$，$\vec{0}=(0,0)$。

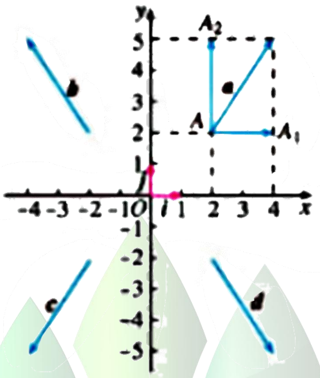
如图，在直角坐标平面内，以原点O为起点作$\overrightarrow{OA}=a$，则点A的位置由a唯一确定



设$\overrightarrow{OA}=x\vec{i}+y\vec{j}$，则向量$\overrightarrow{OA}$的坐标$(x，y)$就是点$A$的坐标；反过来，点$A$的坐标$(x，y)$也是向量$\overrightarrow{OA}$的坐标，因此，在平面直角坐标系内，每一个平面向量都是可以用一对实数唯一表示。

（三）巩固练习

如图，分别用基底$(i，j)$表示向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，并求出它们的坐标。



（四）课堂小结

向量$\vec{a}$的（直角）坐标，记作$\vec{a}=(x，y)$。

强调在平面直角坐标系内，每一个平面向量都是可以用一对实数唯一表示。

作业布置：

完成课后习题（1）（2）。

闽试教育
MINSHI EDUCATION

中学数学　模拟试卷（二）

参考答案

第一部分　选择题

一、选择题

1.【答案】D。解析：$\dfrac{5}{2+i}+ai=\dfrac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)}+ai=2+(a-1)i$，$\dfrac{1+bi}{i}=\dfrac{(1+bi)i}{i^2}=b-i$，则有$\begin{cases}b=2\\a-1=-1\end{cases}$，解得$a=0$，$b=2$，$a^2+a+b^2=4$。故本题选 D。

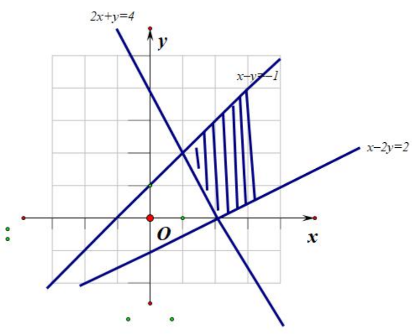
2.【答案】B。解析：∵圆心到直线的距离为$d=\dfrac{|3\times2-4+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$，$r=3$。∴曲线$C$到直线$l$的距离为 3 的点有 2 个。故本题选 B。

3.【答案】D。解析：根据图象可知，$f(0)=0$，$\therefore b=0$，

$\because f'(x)=\dfrac{a(x^2+c)-2ax^2}{(x^2+c)^2}=\dfrac{a(c-x^2)}{(x^2+c)^2}$，$\because f'(1)=0$，

$\therefore a(c-1)=0$，$f(1)=1=\dfrac{a}{1+c}$，$\therefore a=2$，$c=1$，$a+b+c=2+1+0=3$。故本题选 D。

4.【答案】A。解析：画出可行域如下，目标函数即为圆心在原点，半径为z的圆。与直线$2x+y-4=0$相切时取得半径z为最小值，没有最大值，求得最小值为$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$。故本题选 A。



5.【答案】D。解析：正弦函数在$[0,\ \pi]$中先增大后减小，所以①错；根据正弦定理，∵$a\cos A=b\cos B$，$\therefore\sin A\cos A=\sin B\cos B$，$\therefore\sin 2A=\sin 2B$，$\therefore A=B$或$A+B=90°$，$\therefore$ $\triangle ABC$为等腰或直角三角形，所以②错；根据三角形中大边对大角，设$AB=x$，则由余弦

定理可得 $x^2+m^2-2xm\cdot\cos\frac{\pi}{3}=9\Rightarrow x^2-xm+m^2-9=0$，满足条件的△$ABC$恰有一解，等价方程 $x^2-xm+m^2-9=0$ 恰有一正根，若 $\Delta=0\Rightarrow m^2-4(m^2-9)=0\Rightarrow m=2\sqrt{3}\Rightarrow x_1=x_2=\sqrt{3}$ 符合题意。若 $\Delta>0\Rightarrow 0<m<2\sqrt{3}$，则方程 $x^2-xm+m^2-9=0$ 必有一正根，一非正根，$x_1x_2=m^2-9\le 0\Rightarrow 0<m\le 3$，所以 m 的取值范围为 $(0,3]\cup\{2\sqrt{3}\}$，∴③错误；根据正弦函数在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 得区间上的图象可知，④错，∴错误的有四个。故本题选 D。

6.【答案】B。解析：由 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，得 $\boldsymbol{c}^2-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}+\boldsymbol{ab}=0$，由 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$，设 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 θ，由于 $\boldsymbol{a}$ 垂直 $\boldsymbol{b}$，所以得 $|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta$，即 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}\cos\theta$，所以最大值为 $\sqrt{5}$。故本题选 B。

7.【答案】选 A。解析：因为 E、F 分别是 AB、BC 的中点，所以 $EF\,//\,AC$，而 $EF\perp DE$，所以 $AC\perp DE$；由正三棱锥 $A-BCD$ 可得 $AC\perp BD$，而 $BD\cap DE=D$，BD，$DE\subset$ 平面 ABD，所以 $AC\perp$ 平面 ABD，所以 $AC\perp AB$，$AC\perp AD$，且 $AC=AB=AD$，这样在等腰 $Rt\triangle ABC$ 中可得 $AC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，则 $V_{A-BCD}=V_{C-ABD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$。故本题选 A。

8.【答案】C。解析：立体几何的公理有：公理一：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内。公理二：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且仅有一条经过该点的公共直线。公理三：经过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面。公理四：平行于同一直线的两条直线互相平行。其中①是面面平行的判定定理，不属于公理。故本题选 C。

9.【答案】A。解析：在求解“$f(x)=\mathrm{e}^{-x}-\sin x$ 的零点个数”时，会通过画图考虑 $y=\mathrm{e}^{-x}$、$y=\sin x$ 的交点个数，因此渗透了数形结合思想、化归与转化思想。

10.【答案】B。解析：学生解决问题的思路是“执果索因”，可知使用的是分析法。

第二部分　非选择题

二、填空题

11.【答案】$(1,4)$。解析：当 $0<a<1$ 时，令 $z=x^2-ax+4$，则 $y=\log_a z$ 为减函数，要使得 $y=\log_a(x^2-ax+4)$ 有最小值，则只要 $z=x^2-ax+4$，有最大值即可，不符合题意；当

$a>1$时，令$z=x^2-ax+4$，则$y=\log_a z$为增函数，则只要$z=x^2-ax+4$有正项最小值即可，即$\Delta<0$，解得$-4<a<4$。综上所述，a的取值范围为$(1,4)$。

12.【答案】-1。解析：$\because$函数$f(x)$是连续的，$\therefore x=1$处函数值等于极限值，

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=0$，$\therefore x=1$，$x+a=1+a=0$，$a=-1$。

13.【答案】科学价值；应用价值。解析：《普通高中数学课程标准》提到，通过高中数学课程的学习，学生能认识数学的科学价值、文化价值、审美价值、应用价值。

14.【答案】数学表达；数学思考。解析：《义务教育数学课程标准》提到，建立符号意识有助于学生理解符号的使用是数学表达和进行数学思考的重要形式。

15.【答案】公理化。解析：古希腊数学以《几何原本》为代表的欧几里得体系，着重抽象概念与逻辑以及概念之间的逻辑关系，表达形式由定义、公理、定理、证明构成两种思维各具特色，一直发展到当代算法化与公理化的两大分野。

三、简答题

16.【参考答案】

（1）原因：第一，100件产品，其中有5件次品与次品率为5%是两个不同的概念；第二，该实验不是独立重复实验，从100件产品中任抽6件，可当作抽了6次，每次抽1个，但每次抽到次品还是正品，显然直接影响到下一次抽到次品还是正品，显然直接影响到下一次抽到次品或正品的概率。具体的说，如果第一次抽出的是次品，那么次品就少了一个，第二次再抽到次品的概率就小了，这就是说各次实验之间并非独立的，错用了独立重复实验概率公式。

（2）正确解法：$P=\dfrac{C_5^1C_{95}^5}{C_{100}^6}=0.2430$。

相关建议：①在教学概率问题时，要把握细节，引导学生及时反思，破除学生的思维误区，避免知识混淆；

②通过对比练习，引导学生认清独立重复试验的含义，明确使用独立重复试验概率公式的前提；

③适时渗透动手实践教学环节，让学生在动手、动脑的过程中，梳理知识的异同点，避免机械的模仿和记忆。

闽试教育 MINSHI EDUCATION

四、解答题

17.【参考答案】（1）$T=\pi$，值域为$\left[\frac{1}{2},2\right]$；（2）$\frac{3\sqrt{3}}{10}+\frac{7}{5}$。

（1）$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，

$\therefore T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，由$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}\right]$，$\therefore\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，

$\therefore f(x)$的值域为$\left[\frac{1}{2},2\right]$。

（2）$\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)+1=\frac{8}{5}$，则$\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，$2x_0+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}\right]$，

$\therefore\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$，则$f\left(x_0-\frac{\pi}{12}\right)=\sin 2x_0+1=\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)+1=$

$\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}+1=\frac{3\sqrt{3}}{10}+\frac{7}{5}$。

18.【参考答案】（1）$\sqrt{2}$；（2）$X_n+X_{n+1}=X_{n+2}$；（3）$12n^2+6n$。

（1）由题意知，该等差数列前 2020 项和为$\frac{(a+b)\times 2020}{2}=2020$，即$a+b=2$。对其作平方$4=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=c^2+2ab$，则$c^2=4-2ab\geq 4-2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=2$，那么正数$c_{\min}=\sqrt{2}$。

（2）因为a，b，c成等比数列，则$b^2=ac$，又$a^2+b^2=c^2$，

联立得$\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{c}{a}-1=0$，解得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

则$X_n=\left(\frac{c}{a}\right)^n-\left(-\frac{a}{c}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，

$X_{n+1}=\left(\frac{c}{a}\right)^{n+1}-\left(-\frac{a}{c}\right)^{n+1}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$，

$X_n+X_{n+1}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}=X_{n+2}，$$

故 $X_n+X_{n+1}=X_{n+2}$。

（3）因为 a， b， c 成等差数列，则 $2b=a+c$，设公差为 n，又 $a^2+b^2=c^2$，

联立得 $a^2+(a+n)^2=(a+2n)^2$，解得 $a=3n$， $b=4n$， $c=5n$， $n\in N^*$，

则 $S_n=\frac{1}{2}\times 3n\times 4n=6n^2$，

故 $T_{2n}=-S_1+S_2-S_3+\cdots-S_{2n-1}+S_{2n}$

$=(S_2-S_1)+(S_4-S_3)+\cdots+(S_{2n}-S_{2n-1})$

$=6[(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots+((2n)^2-(2n-1)^2)]$

$=6[(2-1)(2+1)+(4+3)(4-3)+\cdots+(2n+2n-1)\times(2n-2n+1)]$

$=6[3+7+11+\cdots+(4n-1)]$

$=12n^2+6n$。

19.【参考答案】（1）$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$；（2）①$12\sqrt{3}$；②见解析。

（1）设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由题意得 $b=2\sqrt{3}$。由 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$， $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=4$，所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$。

（2）①设点 $A(x_1, y_1)$， $B(x_2, y_2)$，设直线 AB 方程为 $y=\frac{1}{2}x+t$，代入椭圆方程可得：$x^2+tx+t^2-12=0$，由 $\Delta>0$，解出 $-4<t<4$。

由韦达定理可知 $x_1+x_2=-t$， $x_1x_2=t^2-12$，所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{48-3t^2}$。所以四边形 $APBQ$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times 6\times|x_1-x_2|=3\sqrt{48-3t^2}$，所以当 $t=0$， $S_{\max}=12\sqrt{3}$。

②当 $\angle APQ=\angle BPQ$，则 PA 、 PB 的斜率之和为 0，

设直线 PA 的斜率为 k，则直线 PB 的斜率为 $-k$，直线 PA 的直线方程为 $y-3=k(x-2)$，

再联立椭圆方程与直线方程，$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1\\ y-3=k(x-2)\end{cases}$，整理得 $(3+4k^2)x^2+8(3-2k)kx+4(3-2k^2)-48=0$，所以 $x_1+2=\dfrac{8(2k-3)k}{3+4k^2}$；同理，直线 PB 的方程为 $y-3=-k(x-2)$，可得 $x_2+2=\dfrac{-8(-2k-3)k}{3+4k^2}=\dfrac{8k(2k+3)}{3+4k^2}$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{16k^2-12}{3+4k^2}$， $x_1-x_2=\dfrac{-48k}{3+4k^2}$， $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{k(x_1-2)+3-k(x_2-2)-3}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{2}$。所以直线 AB 的斜率为定值 $\dfrac{1}{2}$。

20.【参考答案】（1）见解析；（2） $a>-\dfrac{2}{\ln 2}$。

（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$，$f'(x)=1+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x+a}{x}$，①当 $a\geq 0$ 时， $f'(x)>0$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；②当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-a$。当 $0<x<-a$ 时， $f'(x)<0$, 函数 $f(x)$ 为减函数；当 $x>-a$ 时， $f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 为增函数。综上所述，当 $a\geq 0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-a,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,-a)$。

（2）由（1）可知，①当 $-a\leq 1$ 时，即 $a\geq -1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上为增函数，所以在区间 $[1,2]$ 上， $f(x)_{\min}=f(1)=2$，显然函数 $f(x)-1$ 在区间 $[1,2]$ 上恒大于零；②当 $1<-a<2$ 时，即 $-2<a<-1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,-a)$ 上为减函数，在 $(-a,2]$ 为增函数，所以 $f(x)_{\min}=f(-a)=-a+1+a\ln(-a)$。由题意 $f(x)_{\min}-1=f(-a)-1=-a+1+a\ln(-a)-1>0$，计算得出 $a>-\mathrm{e}$，所以 $-2<a<-1$。③当 $-a\geq 2$ 时，即 $a\leq -2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上为减函数，所以 $f(x)_{\min}=f(2)=3+a\ln 2$，根据题意有 $f(x)_{\min}-1=3+a\ln 2-1=2+a\ln 2>0$，解得 $a>-\dfrac{2}{\ln 2}$, 所以 $-\dfrac{2}{\ln 2}<a\leq -2$。综上所述，当 $a>-\dfrac{2}{\ln 2}$, 时，都有 $f(x)-1>0$ 成立。

五、综合应用

21.【参考答案】

（1）教学目标：

知识与技能目标：在创设的问题情境中，引导学生发现余弦定理的内容，推证余弦定理，并简单运用余弦定理解三角形。

过程与方法目标：引导学生通过观察、推导、比较，由特殊到一般归纳出余弦定理，培养学生的创新意识和观察与逻辑思维能力。

情感态度与价值观目标：通过学生之间、师生之间的交流、合作和评价，调动学生的主动性和积极性，给学生成功的体验，培养学生学习数学兴趣和热爱科学、勇于创新的精神。

教学重点：理解掌握余弦定理的内容；初步对余弦定理进行应用。

教学难点：利用向量法证明余弦定理的思路。

（2）数学思想：数形结合，转化思想

（3）教学过程：

（一）情境导入，设置问题

提问：乘火车时会经过一个个隧道，大家思考隧道是如何开凿的？（多媒体展示隧道图片，引导学生发表意见）

学情预设：测量山脚两端的距离。（引导学生思考如何测量山脚两端的距离）

展示技术人员的方案，让学生与自己的方案进行比较，并思考这个方案的设计原理。

（二）分析问题，探究定理

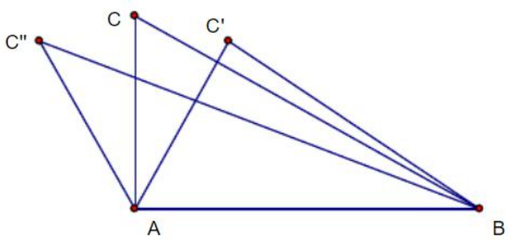
①引导回顾正弦定理以及正弦定理能解决的解三角形问题的类型。

②简化问题，假设 $\angle A$ 为直角。从最特殊的直角三角形入手，运用勾股定理解决问题。

（记 $BC=a$， $AC=b$， $AB=c$，运用勾股定理 $a^2=b^2+c^2$，解得 a 即可）

③用向量法解释勾股定理

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$，$\left(\overrightarrow{BC}\right)^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{BA}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\cos\angle A$。



顺着向量法的思路，分别计算锐角三角形和钝角三角形中的三边关系。

锐角三角形中：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$，$\left(\overrightarrow{BC}\right)^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2$，

$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{BA}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\cos\angle A$。

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，少了 $2bc\cdot\cos A$。

钝角三角形中：多了 $2bc\cdot\cos A$。

④用自然语言描述余弦定理：三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍。

（三）巩固练习

①课本习题。

②归纳出“两边一夹角”的解三角形模型。

（四）课堂小结

余弦定理：三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍。

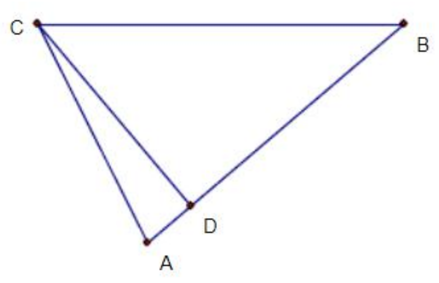
符号语言：$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A\\ b^2&=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C\end{aligned}$。

强调“大边对大角，小边对小角”。

（五）作业布置

完成课后习题。

直角三角形中可以运用勾股定理，没有直角就构造直角来求解（以锐角三角形为例，钝角三角形类似）。



$BC^2=CD^2+BD^2$，$\dfrac{CD}{AC}=\sin A$，$\dfrac{AD}{AC}=\cos A$，$BD=AB-AD$，

$$\begin{aligned}BC^2&=(AC\cdot\sin A)^2+(AB-AC\cdot\cos A)^2\\&=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos A\end{aligned}。$$

闽试教育
MINSHI EDUCATION

根据以上探究过程，得到余弦定理：$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{cases}$。

闽试教育
MINSHI EDUCATION