小学数学学科冲刺讲义——参考答案

一、应用题

题型一：行程问题

解：（1）设乙的速度是每分钟x米，则甲的速度是每分钟（$x+200$）米，依题意有

$3x+150=200\times3$，

解得$x=150$，

$x+200=150+200=350$．

答：甲的速度是每分钟350米，乙的速度是每分钟150米．

（2）设乙的速度应提高到每分钟y米.

由题意，得$1.2\times300+1.2y\geq600$

解得$y\geq200$.

答：要想不超过1.2分钟两人再次相遇，则乙的速度至少要提高到每分钟200米.

题型二：利润问题

解：（1）设该工艺品标价为x元/件，则进价为（$x-45$）元，

由题意可得：$8[85\%x-(x-45)]=12[x-35-(x-45)]$，

解这个方程得：$x=200$，

∴进价为：$200-45=155$，

答：这种工艺品的进价为155元，标价为200元．

（2）设每天所获得的利润为W元，每件降价m元，

则$W=(45-m)(100+4m)$，

$W=-4m^2+80m+4500$，

$W=-4(m-10)^2+4900$，

当$m=10$时，W得到最大值为4900，

即当每件降价10元时，获利最多．为4900元．

题型三：分配问题

解：设捐100元、500元、2000元的人数分别为x、y、z，

由题意得$\begin{cases}x+y+z=100\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①\\100x+500y+2000z=19000\cdots②\end{cases}$

由②得$x+5y+20z=190$③

③一①得$4y+19z=90$.

故z为不能被4除尽且$z<5$的偶数，所以$z=2$，$y=13$.

答：该单位有13人捐款500元.

题型四：工程问题

解：（1）设甲队独做需a天，乙队独做需b天．

建立方程组$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{24}\\ \dfrac{20}{a}+\dfrac{40}{b}=1\end{cases}$，

解得$a=30$（天），$b=120$（天）

经检验$a=30$，$b=120$是原方程组的解．

答：甲队独做需30天，乙队独做需120天．

（2）设甲队独做需x万元，乙队独做需y万元，

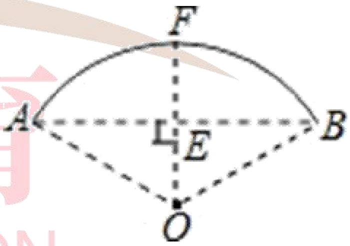
建立方程组$\begin{cases}24(\dfrac{x}{30}+\dfrac{y}{120})=120\\ \dfrac{20x}{30}+\dfrac{40y}{120}=110\end{cases}$，

解得$x=135$，$y=60$

答：甲队独做需135万元，乙队独做需60万元．

题型五：几何形体问题

解：连接OB，过点O作$OE\perp AB$，垂足为E，交$\overset{\frown}{AB}$于F，如图，



由垂径定理，可知：E是AB中点，F是$\overset{\frown}{AB}$中点，

$\therefore EF$是弓形高，

$\therefore AE=\dfrac{1}{2}AB=2\sqrt{3}$，$EF=2$，

设半径为R米，则$OE=(R-2)$米，

在$Rt\triangle AOE$中，由勾股定理，得$R^2=(R-2)^2+(2\sqrt{3})^2$，

解得$R=4$，

$\because sin\angle AOE=\dfrac{AE}{OA}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \angle AOE=60°$，

$\therefore \angle AOB=120$度．

$\therefore \overset{\frown}{AB}$的长为$\dfrac{120\times4\pi}{180}=\dfrac{8}{3}\pi$（$m$），

$\therefore$帆布的面积为$\dfrac{8}{3}\pi\times60=160\pi$（平方米）．

二、平面几何

题型一：动点问题

解：（1）在直角$\triangle ABC$中，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=4$，

则Q从C到B经过的路程是9，需要的时间是4.5秒．此时P运动的路程是4.5，P和Q之间的距离是：

$3+4+5-4.5=7.5$.

根据题意得：

（$t-4.5$）$+2$（$t-4.5$）$=7.5$，

解得：$t=7$．

答：当$t=7$时，点P与点Q相遇；

故答案为：7．

（2）Q从C到A的时间是3秒，P从A到C的时间是3秒，

则当$0\leqslant t\leqslant 2$时，若$\triangle PCQ$为等腰三角形，则一定有：$PC=CQ$，

即$3-t=2t$，

解得：$t=1$．

当$2<t\leqslant 3$时，若$\triangle PCQ$为等腰三角形，则一定有$PQ=QC$（如图1）．则Q在PC的中垂线上，作$QH\perp AC$，则$QH=\frac{1}{2}PC$．$\triangle AQH\backsim\triangle ABC$，

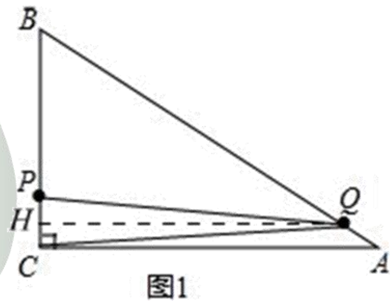


图1

在直角$\triangle AQH$中，$AQ=2t-4$，则$QH=\frac{3}{5}AQ=\frac{3}{5}$（$2t-4$），

$\because PC=BC-BP=3-t$，

$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$（$2t-4$）$=3-t$，

解得：$t=\frac{39}{17}$；

则当$t=1$或$t=\frac{39}{17}$时$\triangle PCQ$为等腰三角形；

（3）在点Q从点B返回点A的运动过程中，P一定在AC上，则$PC=t-3$，

同（2）可得：$\triangle PCQ$中，PC边上的高是：$\frac{3}{5}$（$14-2t$），

故$s=\frac{1}{2}$（$t-3$）$\times\frac{3}{5}$（$14-2t$）$=-\frac{3}{5}t^2+6t-\frac{63}{5}$．

题型二：圆+三角形

例1、

（1）证明：连接OA，

$\because DA$平分$\angle BDE$，

$\therefore\angle BDA=\angle EDA$．

$\because OA=OD$，

$\therefore\angle ODA=\angle OAD$，

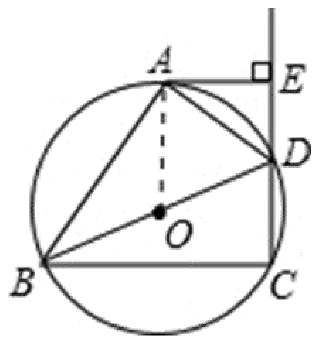
$\therefore\angle OAD=\angle EDA$，

$\therefore OA\parallel CE$．

$\because AE\perp CE$，

$\therefore AE\perp OA$．

$\therefore AE$是$\odot O$的切线．



（2）解：∵BD是直径，

∴$\angle BCD=\angle BAD=90°$．

∵$\angle DBC=30°$，$\angle BDC=60°$，

∴$\angle BDE=120°$．

∵DA平分$\angle BDE$，

∴$\angle BDA=\angle EDA=60°$．

∴$\angle ABD=\angle EAD=30°$．

∵在$Rt\triangle AED$中，$\angle AED=90°$，$\angle EAD=30°$，

∴$AD=2DE$．

∵在$Rt\triangle ABD$中，$\angle BAD=90°$，$\angle ABD=30°$，

∴$BD=2AD=4DE$．

∵DE的长是$1cm$，

∴BD的长是$4cm$．

例 2、

解：①∵BE为圆O的切线，BA为圆的弦，

∴$\angle EBA$为弦切角，

∴$\angle EBA=\angle C$，又$\angle EBC=2\angle C$，

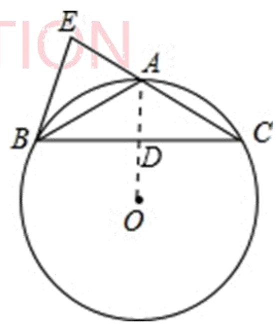
∴$\angle EBC=2\angle EBA$，

∴$\angle ABC=\angle C$，

∴$AB=AC$；

②（i）连接OA．

∵$AB=AC$，∴$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，



∴$OA\perp BC$，

∴D为BC的中点，即$BD=CD$，

∵$\tan\angle ABE=\dfrac{1}{2}$，$\angle EBA=\angle ABC$，

∴$\tan\angle ABC=\dfrac{1}{2}$，

在$Rt\triangle ABD$中，$\tan\angle ABC=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{1}{2}$，

设$AD=k$，则$BD=2k$，$BC=4k$，

在$\triangle ABD$中，$\angle ADB=90°$，根据勾股定理得：$AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{5}k$，

则$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sqrt{5}k}{4k}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$；

（ii）在$Rt\triangle ADC$中，$AC=AB=2$，$tan\angle ABE=tanC=\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{1}{2}$，

设$AD=x$，$DC=2x$，根据勾股定理得：$x^2+(2x)^2=2^2$，

解得：$x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore BC=2DC=4x=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$，

$\because \angle EBA=\angle C$，$\angle E=\angle E$，

$\therefore \triangle AEB\backsim\triangle BEC$，

$\therefore \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{\frac{8\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$，

$\therefore BE=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}AE$，

又$\because \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{BE}{EC}$，即$BE^2=AE\bullet CE$，

$\therefore (\dfrac{4\sqrt{5}}{5}AE)^2=AE(AC+AE)=AE(2+AE)$，

整理得：$\dfrac{16}{5}AE^2=2AE+AE^2$，

解得：$AE=\dfrac{10}{11}$．

例 3、

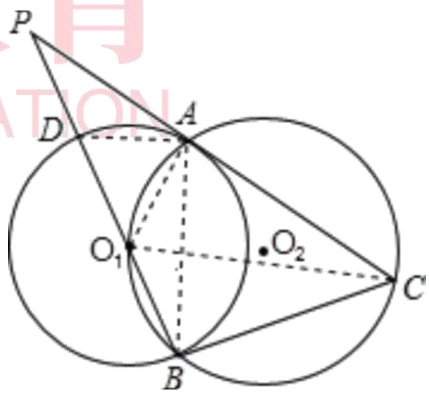
解：(1) 连结 AO_1，

∵BC 是⊙O_1 的切线，∴$\angle O_1BC=90°$，

∵四边形 AO_1BC 是⊙O_2 的内接四边形，

∴$\angle O_1BC+\angle O_1AC=180°$.∴$\angle O_1AC=90°$，

∴AC 是⊙O_1 的切线



(2) 连结 AB

∵PC 切⊙O_1 于点 A　∴$\angle PAD=\angle ABP$

又$\angle ACO_1=\angle ABO_1$

∴$\angle PAD=\angle ACO_1$　　∴$AD\parallel O_1C$

(3) ∵PC 是⊙O_1 的切线，PB 是⊙O_1 的割线，

∴$PA^2=PD\cdot PB$　　∵PD=1，PB=5，∴$PA=\sqrt{5}$

∵AC、BC 分别切⊙O_1 于 A、B

∴$O_1B\perp BC$，$O_1A\perp PC$

∴$\angle PBC=\angle PAO_1=90°$

又$\angle P=\angle P$ ∴$\triangle PBC\backsim\triangle PAO_1$

$\therefore \frac{BC}{AO_1} = \frac{PB}{PA}$,即$\frac{BC}{2} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

$\therefore$BC=$2\sqrt{5}$.

三、函数

（一）二次函数

例 1、

解：（1）由题意，得：$\begin{cases} 8-4b+c=0 \\ \frac{1}{2}+b+c=0 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} b=\frac{3}{2} \\ c=-2 \end{cases}$；

$\therefore y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-2$；

（2）由（1）知：C（0，−2）；

则$AC^2=AO^2+OC^2=20$，$BC^2=BO^2+OC^2=5$；

而$AB^2=25=AC^2+BC^2$；

$\therefore\triangle ACB$是直角三角形，且$\angle ACB=90°$，

$\therefore AC\perp BC$，

$\because EF/\!/AC$，

$\therefore EF\perp BC$；

$\because S_{\triangle CEF}=2S_{\triangle BEF}$，

$\therefore CF=2BF$，$BC=3BF$；

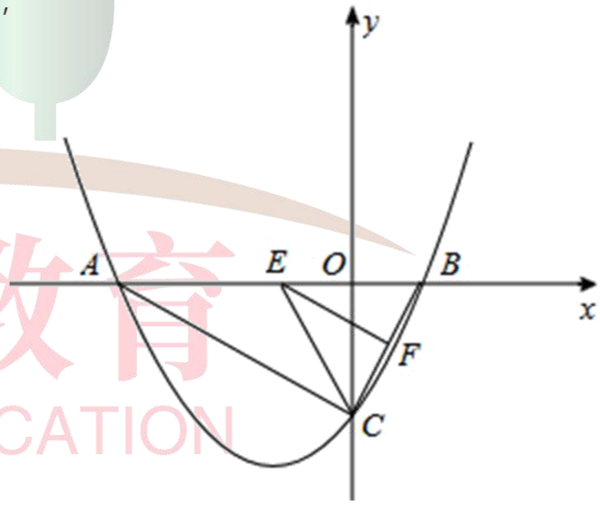
$\because EF/\!/AC$，

$\therefore \frac{BE}{AB}=\frac{BF}{BC}=\frac{1}{3}$；

$\because AB=5$，

$\therefore BE=\frac{5}{3}$；

$OE=BE-OB=\frac{2}{3}$，故E（$-\frac{2}{3}$，0）；

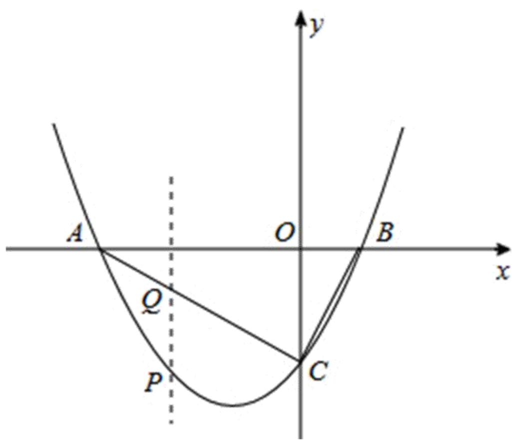


（3）设P点坐标为（m，$\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m-2$）；

已知A（−4，0），C（0，−2），

设直线AC的解析式为：

$y=kx-2$，



则有：$-4k-2=0$，$k=-\frac{1}{2}$；

∴直线AC的解析式为$y=-\frac{1}{2}x-2$；

∴Q点坐标为（m，$-\frac{1}{2}m-2$）；

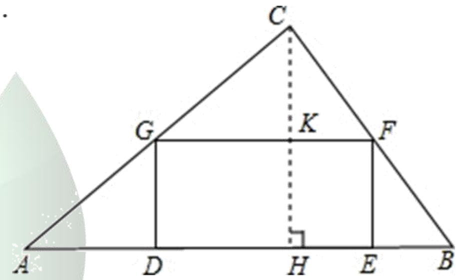
则$PQ=\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m-2-$（$-\frac{1}{2}m-2$）$=-\frac{1}{2}m^2-2m$；

∴当$m=-2$，即P（-2，-3）时，PQ最大，且最大值为2．

故当P运动到OA垂直平分线上时，PQ的值最大，此时P（-2，-3）．

例 2、

解：（1）如图，作$CH\perp AB$于点H，交FG于点K．



由$\angle C=90°AC=8$，$BC=6$，易得$AB=10$．

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\times BC=\frac{1}{2}AB\bullet CH$，

$\therefore h=CH=\frac{6\times 8}{10}=\frac{24}{5}=4.8$．

（2）如图，设$DE=GF=y$，

$\because GF/\!/AB$，

$\therefore\triangle CGF\backsim\triangle CAB$，由此可得$\frac{y}{10}=\frac{4.8-x}{4.8}$．

$\therefore y=10-\frac{25}{12}x$

$\therefore S=xy=x(10-\frac{25}{12}x)$

$=-\frac{25}{12}x^2+10x$

$=-\frac{25}{12}(x-2.4)^2+12$．

$\because a=-\frac{25}{12}<0$，

∴当$x=2.4$时，S有最大值12．

答：当x取$2.4m$时，水池$DEFG$的面积（S）最大，且$S=12m^2$．

（二）三角函数

例 1、解：

$$(1)\,f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+(1+\cos 2x)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{3}{2}$$

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

由题意得 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in \boldsymbol{Z}$

即 $k\pi-\dfrac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\in \boldsymbol{Z}$

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right],k\in \boldsymbol{Z}$.

(2) 先把 $y=\sin 2x$ 图像上所有的点向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位，得到 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$ 的图像，再把所得的图像上所有的点向上平移 $\dfrac{3}{2}$ 个单位长度，就得到 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{3}{2}$ 的图像.

例 2、解：

$(1)\,f(x)=2sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}cos2x$

$=1-cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)-\sqrt{3}cos2x$

$=sin2x-\sqrt{3}cos2x+1$

$=2\left(\dfrac{1}{2}sin2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}cos2x\right)+1$

$=2sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$

$\because x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

$\therefore\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$

函数在 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上最大值为 3，最小值为 2，

综上所述，结论是：$f_{max}(x)=3$，$f_{min}(x)=2$，

(2)由(1)知 $-2<f(x)-m<2$ 在 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立等价于

$f(x)+2>m>f(x)-2$ 在 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，

且 $f_{max}(x)=3$，$f_{min}(x)=2$，

所以，$1<m<4$

综上所述，结论是 $m\in(1,4)$.

例 3、解：

(1)在$\triangle ABC$中，由余弦定理知

$a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$

$\because a^2+c^2-b^2=\frac{1}{2}ac$

$\therefore \cos B=\frac{1}{4}$

$\because A+B+C=\pi$

$\therefore \sin^2\frac{A+C}{2}+\cos 2B$

$=\sin^2\frac{\pi-B}{2}+2\cos^2 B-1$

$=\frac{1+\cos B}{2}+2\cos^2 B-1$

$=2\cos^2 B+\frac{\cos B}{2}-\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{4}$

(2)$\because b=2$

$\therefore$由$a^2+c^2-b^2=\frac{1}{2}ac$可知$a^2+c^2-4=\frac{1}{2}ac$

即$\frac{1}{2}ac\geq 2ac-4$

$\therefore ac\leq\frac{8}{3}$

$\because \cos B=\frac{1}{4}$，$0<B<\pi$

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leq\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{3}$

$\therefore\triangle ABC$面积的最大值为$\frac{\sqrt{15}}{3}$

综上所述，结论是：$\frac{\sqrt{15}}{3}$

例 4、

解：（1）由正弦定理得：$a=2b\sin A\Leftrightarrow \sin A=2\sin B\sin A$，

$\because A$为锐角，故$\sin A\neq 0$，

$\therefore \sin B=\frac{1}{2}$，而$B$为锐角，

$\therefore B=\frac{\pi}{6}$．

(2)$\because B=\frac{\pi}{6},\therefore A+C=\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \cos A+\sin C=\cos A+\sin(\frac{5\pi}{6}-A)$

$=\cos A+\sin\frac{5\pi}{6}\cos A-\cos\frac{5\pi}{6}\sin A$

$=\frac{3}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\sqrt{3}\sin(A+\frac{\pi}{3})$

$\because \triangle ABC$是锐角三角形，$A+C=\frac{5\pi}{6}$，

$\therefore 0<C=\frac{5\pi}{6}-A<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \frac{\pi}{3}<A<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \frac{2\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}$，

$\therefore \frac{1}{2}<\sin(A+\frac{\pi}{3})<\frac{\sqrt{3}}{2}$．

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}\sin(A+\frac{\pi}{3})<\frac{3}{2}$．

故$\cos A+\sin C$的取值范围是$(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2})$．

（三）函数性质（导数的应用）

例 1、

（Ⅰ）解：由已知得$f(x)=\frac{e(x-1)}{e^x}$，

$\therefore f'(x)=-\frac{e(x-2)}{e^x}$ $\therefore f(1)=0$，又$\because f(1)=1$，

曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为：$y=x-1$．

（Ⅱ）解法一：令$g(x)=f(x)-x^2+4x-m=(x-1)e^{1-x}-x^2+4x-m$，

$\therefore g'(x)=-(e^{1-x}-2)(x-2)$，

由$g'(x)<0$得，$x>2$；由$g'(x)>0$得，$x<2$易知，$x=2$为$g(x)$极大值点，

$g(x)_{max}=g(2)=\frac{1}{e}+4-m$

又$x\to-\infty$时$g(x)\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$g(x)\to-\infty$

即函数$g(x)$在$x<2$时有负值存在，在$x>2$时也有负值存在．

由题意，只需满足$g(x)_{max}=\frac{1}{e}+4-m>0$，

$\therefore m$的取值范围是：$m<\frac{1}{e}+4$

解法二：$f'(x)=-e^{1-x}(x-2)$，

由$f'(x)<0$得，$x>2$；由$f'(x)>0$得，$x<2$易知，$x=2$为极大值点．

而$y=x^2-4x+m$（$m\in R$）在$x=2$时取得极小值，

由题意，只需满足$f(2)=\frac{1}{e}>2^2-8+m$，解得$m<\frac{1}{e}+4$．

例 2、

解：（1）∵函数 $g(x)=f'(x)-\frac{x}{3}=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}-\frac{x}{3}(x>0)$，

令 $g(x)=0$，得 $m=-\frac{1}{3}x^3+x(x>0)$；

设 $\varphi(x)=-\frac{1}{3}x^3+x(x>0)$，

$\therefore \varphi'(x)=-x^2+1=-(x-1)(x+1)$；

当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，

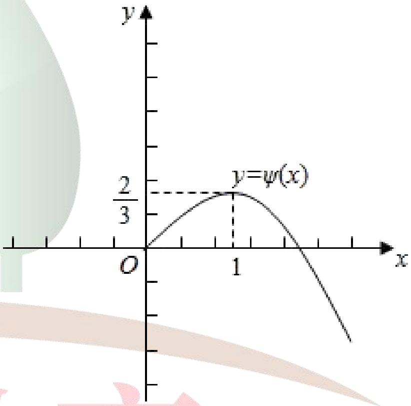
当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数；

$\therefore x=1$ 是 $\varphi(x)$ 的极值点，且是极大值点，

$\therefore x=1$ 是 $\varphi(x)$ 的最大值点，

$\therefore \varphi(x)$ 的最大值为 $\varphi(1)=\frac{2}{3}$；

又 $\varphi(0)=0$，结合 $y=\varphi(x)$ 的图象，如图；



可知：①当 $m>\frac{2}{3}$ 时，函数 $g(x)$ 无零点；

②当 $m=\frac{2}{3}$ 时，函数 $g(x)$ 有且只有一个零点；

③当 $0<m<\frac{2}{3}$ 时，函数 $g(x)$ 有两个零点；

④当 $m\le 0$ 时，函数 $g(x)$ 有且只有一个零点；

综上，当 $m>\frac{2}{3}$ 时，函数 $g(x)$ 无零点；

当 $m=\frac{2}{3}$ 或 $m\le 0$ 时，函数 $g(x)$ 有且只有一个零点；

当 $0<m<\frac{2}{3}$ 时，函数 $g(x)$ 有两个零点；

（2）对任意 $b>a>0$，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ 恒成立，

等价于 $f(b)-b<f(a)-a$ 恒成立；

设 $h(x)=f(x)-x=\ln x+\frac{m}{x}-x(x>0)$，

则 $h(b)<h(a)$.

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

$\because h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{m}{x^2}-1\le 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore m\ge -x^2+x=-(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}(x>0)$，

$\therefore m\ge\dfrac{1}{4}$；

对于 $m=\dfrac{1}{4}$， $h'(x)=0$ 仅在 $x=\dfrac{1}{2}$ 时成立；

$\therefore m$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.

四、概率统计

例 1、

解：（1）重量超过505克的产品数量是40×（0.05×5+0.01×5）=12件；

（2）Y的所有可能取值为0，1，2；

$P(Y=0)=\dfrac{C_{28}^2}{C_{40}^2}=\dfrac{63}{130}$，$P(Y=1)=\dfrac{C_{12}^1C_{28}^1}{C_{40}^2}=\dfrac{56}{130}$，$P(Y=2)=\dfrac{C_{12}^2}{C_{40}^2}=\dfrac{11}{130}$，

Y的分布列为

Y	0	1	2
P	$\dfrac{63}{130}$	$\dfrac{28}{65}$	$\dfrac{11}{130}$

（3）从流水线上任取5件产品，重量超过505克的概率为$\dfrac{12}{40}=\dfrac{3}{10}$，

重量不超过505克的概为$1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}$；

恰有2件产品合格的重量超过505克的概率为$C_5^2(\dfrac{3}{10})^2\cdot(\dfrac{7}{10})^3$．

例 2、

解：记A_1，A_2分别表示甲击中9环，10环，B_1，B_2分别表示乙击中8环，9环，

A表示在一轮比赛中甲击中的环数多于乙击中的环数，

B表示在三轮比赛中至少有两轮甲击中的环数多于乙击中的环数，

C_1，C_2分别表示三轮中恰有两轮，三轮甲击中环数多于乙击中的环数．

（Ⅰ）甲、乙的射击相互独立

在一轮比赛中甲击中的环数多于乙击中环数包括三种情况，

用事件分别表示为$A=A_1\cdot B_1+A_2\cdot B_1+A_2\cdot B_2$，且这三种情况是互斥的，

根据互斥事件和相互独立事件的概率公式得到

$\therefore P(A)=P(A_1\cdot B_1+A_2\cdot B_1+A_2\cdot B_2)=P(A_1\cdot B_1)+P(A_2\cdot B_1)+P(A_2\cdot B_2)$

$=P(A_1)\cdot P(B_1)+P(A_2)\cdot P(B_1)+P(A_2)\cdot P(B_2)$

$=0.3\times0.4+0.1\times0.4+0.1\times0.4=0.2$.

（II）由题意知在独立的三轮比赛中，至少有两轮甲击中的环数多于乙击中的环数表示三轮中恰有两轮或三轮甲击中的环数多于乙击中的环数，这两种情况是互斥的，即 $B=C_1+C_2$，

$\because P(C_1)=C_3^{\,2}[P(A)]^2[1-P(A)]=3\times0.2^2\times(1-0.2)=0.096$,

$P(C_2)=[P(A)]^3=0.2^3=0.008$,

$\therefore P(B)=P(C_1+C_2)=P(C_1)+P(C_2)=0.096+0.008=0.104$.

例 3、

解：（1）随机变量 $\xi=2$ 表示从袋中随机取球 2 次且每次取的都是红球，

$\therefore P(\xi=2)=\dfrac{C_4^2}{C_5^2}\times\dfrac{C_2^2}{C_3^2}=\dfrac{1}{5}$，即 $\xi=2$ 的概率为 $\dfrac{1}{5}$.

（2）由题意知随机变量 ξ 的所有可能取值为 2, 3, 4，由（1）知 $P(\xi=2)=\dfrac{1}{5}$.

又 $\therefore P(\xi=4)=\dfrac{C_4^1C_1^1}{C_5^2}\times\dfrac{C_3^1C_1^1}{C_4^2}\times\dfrac{C_2^1C_1^1}{C_3^2}\times\dfrac{C_1^1C_1^1}{C_2^2}=\dfrac{2}{15}$,

$\therefore P(\xi=3)=1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{15}=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	2	3	4
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$

$\therefore E\xi=2\times\dfrac{1}{5}+3\times\dfrac{2}{3}+4\times\dfrac{2}{15}=\dfrac{44}{15}$.

五、圆锥曲线

题型一：中点问题

例、

解：（1）设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）.

由已知得 $a=\sqrt{3}$，$c=2$，再由 $a^2+b^2=2^2$，得 $b^2=1$.

故双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$.

（2）联立$\begin{cases} y=kx+1 \\ \dfrac{x^2}{3}-y^2=1 \end{cases}$得：$(1-3k^2)x^2-6kx-6=0$

$\Delta=36k^2+24(1-3k^2)>0$得：$3k^2<2$且$1-3k^2\neq 0$

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{6k}{1-3k^2}$　$x_1x_2=-\dfrac{-6}{1-3k^2}$

$\therefore p$点坐标为$\left(\dfrac{3k}{1-3k^2},\dfrac{1}{1-3k^2}\right)$

$\because kop=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{1}{3k}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore k=\dfrac{1}{2}$

题型二：向量问题

例 1、

（Ⅰ）解：由题意得$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$c=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$，$b^2=a^2-c^2=\dfrac{1}{4}a^2$①，

又点$(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$在E上，所以$\dfrac{1^2}{a^2}+\dfrac{\frac{3}{4}}{b^2}=1$②，联立①②，解得$a=2$，$b=1$，

所以椭圆E的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．

（Ⅱ）解：设A，B的坐标为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，依题意得，

联立方程组$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \\ y=kx+2 \end{cases}$消去$y$，得$(1+4k^2)x^2+16kx+12=0$．

$\triangle=(16k)^2-48(1+4k^2)>0$，$k^2>\dfrac{3}{4}$，$x_1+x_2=\dfrac{-16k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{12}{1+4k^2}$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+2)(kx_2+2)=(1+k^2)x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=$

$(1+k^2)\cdot\dfrac{12}{1+4k^2}+2k\cdot\dfrac{-16k}{1+4k^2}+4=\dfrac{12-20k^2}{1+4k^2}+4$，

$\because \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，$\therefore \dfrac{12-20k^2}{1+4k^2}+4=2$，$k^2=\dfrac{7}{6}>\dfrac{3}{4}$，

所以，$k=\pm\dfrac{\sqrt{42}}{6}$．

例 2、

解：（I）由题义长轴长为4，即$2a=4$，解得：$a=2$，

∵点$(1，\frac{3}{2})$在椭圆上，∴$\frac{1}{4}+\frac{9}{4b^2}=1$ 解得：$b^2=3$

椭圆的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（II）由直线l与圆O相切，得：$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，即：$m^2=1+k^2$

设A（x_1，y_1）B（x_2，y_2）　　由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=kx+m\end{cases}$　消去y，

整理得：（$3+4k^2$）$x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$，

$\therefore y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=k^2\frac{4m^2-12}{3+4k^2}+km(-\frac{8km}{3+4k^2})+m^2=\frac{3m^2-12k^2}{3+4k^2}$

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}+\frac{3m^2+2k^2}{3+4k^2}=\frac{7m^2-12k^2-12}{3+4k^2}$

$\because m^2=1+k^2\therefore x_1x_2+y_1y_2=\frac{-5-5k^2}{3+4k^2}=-\frac{3}{2}$，

解得：$k^2=\frac{1}{2}$，

$\therefore k$的值为：$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$．

例 3、

解：（Ⅰ）将直线l的方程$y=kx+1$代入双曲线C的方程$2x^2-y^2=1$后，

整理得（k^2-2）$x^2+2kx+2=0$．①

依题意，直线l与双曲线C的右支交于不同两点，故

$$\begin{cases}k^2-2\neq 0\\ \triangle=(2k)^2-8(k^2-2)>0\\ -\frac{2k}{k^2-2}>0\\ \frac{2}{k^2-2}>0.\end{cases}$$

解得k的取值范围是$-2<k<-\sqrt{2}$．

（Ⅱ）设A、B两点的坐标分别为（x_1，y_1）、（x_2，y_2），则由①式得$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2k}{2-k^2} \\ x_1 \cdot x_2=\dfrac{2}{k^2-2}. \end{cases}$ ②

假设存在实数k，使得以线段AB为直径的圆经过双曲线C的右焦点F（c，0）．

则由$FA \perp FB$得：$(x_1-c)(x_2-c)+y_1y_2=0$．

即$(x_1-c)(x_2-c)+(kx_1+1)(kx_2+1)=0$．

整理得$(k^2+1)x_1x_2+(k-c)(x_1+x_2)+c^2+1=0$．③

把②式及$c=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$代入③式化简得$5k^2+2\sqrt{6}k-6=0$．

解得$k=-\dfrac{6+\sqrt{6}}{5}$或$k=\dfrac{6-\sqrt{6}}{5} \notin (-2, -\sqrt{2})$(舍去)

可知$k=-\dfrac{6+\sqrt{6}}{5}$使得以线段AB为直径的圆经过双曲线C的右焦点．

题型三：交点问题

例、

解：（1）设P（x，y），由题知：$\dfrac{y}{x+2} \cdot \dfrac{y}{x-2}=-\dfrac{3}{4}$…（2分）

化简得：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$（$y \neq 0$）…（4分）

（2）依题意可知直线l的斜率不为0，则设直线l的方程为：$x=my-1$，A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

联立$\begin{cases} x=my-1 \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$，得$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

则△＞0恒成立，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$，$y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^3+4}$，

则$x_1x_2=(my_1-1)(my_2-1)=\dfrac{-12m^2+4}{3m^2+4}$，$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=\dfrac{-8}{3m^2+4}$．

由题意可得：$\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB}=0$，

即$x_1x_2-(x_1+x_2)+1+y_1y_2=0$，

$\therefore 7-9m^2=0$，解得：$m=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$或$m=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$．

$\therefore$直线l的方程为：$3x \pm \sqrt{7}y+1=0$．

题型四：面积问题

例 1、

解：（1）设所求的椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）

由已知得$|F_1F_2|=2$，

$\therefore |PF_1|+|PF_2|=4=2a$，

$\therefore a=2$，$b^2=a^2-c^2=4-1=3$

$\therefore$此椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）在$\triangle PF_1F_2$中，$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，

由余弦定理得$4=m^2+n^2-2mn\cos 120°$，

$\therefore 4=(m+n)^2-2mn-2mn\cos 120°=16-mn$，

$\therefore mn=12$，

$\therefore \triangle PF_1F_2$的面积$S=\frac{1}{2}mn\sin 120°=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$．

例 2、

（I）证明：依题意设直线l的方程为：$y=kx+1$（k必存在），

联立$\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2=4y \end{cases}$，得$x^2-4kx-4=0$，

$\because \triangle=16k^2+16>0$，

$\therefore$设直线l与抛物线的交点坐标$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

则有$x_1x_2=-4$，$y_1y_2=\frac{x_1^2}{4}\frac{x_2^2}{4}=1$，

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=-3<0$，

依向量的数量积定义，$\cos\angle AOB<0$，

$\therefore \angle AOB$为钝角．

（Ⅱ）解：由（I）知：$|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(4k)^2-4\times(-4)]}=4(k^2+1)$，

O到直线AB的距离$d=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|d=2\sqrt{k^2+1}=4$，

解得$k=\pm\sqrt{3}$，

$\therefore$直线方程为$y=\sqrt{3}x+1$，$y=-\sqrt{3}x+1$．

六、数列

题型一：裂项相消求和法

例 1、

解：（1）当$n=1$时，$a_1=S_1=2a_1-2\Rightarrow a_1=2$，

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2a_n-2)-(2a_{n-1}-2)\Rightarrow a_n=2a_{n-1}$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，以 2 为公比的等比数列，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2\cdot 2^{n-1} = 2^n, n\in N^*$.

（2）由（1）得 $b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^n = n$，

$\therefore \dfrac{1}{b_n b_{n+1}} = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$，

$$\therefore T_n = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

$\therefore$ 数列 $\{\dfrac{1}{b_n b_{n+1}}\}$ 的前 n 项和 $T_n = \dfrac{n}{n+1}, n\in N^*$.

例 2、

解：（I）（法一）$\because \{a_n\}$ 的等差数列 $\therefore S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}\times 2 = n^2 + (a_1-1)n$

又由已知 $S_n = pn^2 + 2n$，

$\therefore p=1$，$a_1-1=2$，

$\therefore a_1=3$，

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 2n+1$

$\therefore p=1$，$a_n=2n+1$；

（法二）由已知 $a_1 = S_1 = p+2$，$S_2 = 4p+4$，即 $a_1+a_2 = 4p+4$，

$\therefore a_2 = 3p+2$，

又此等差数列的公差为2，

$\therefore a_2 - a_1 = 2$，

$\therefore 2p = 2$，

$\therefore p = 1$，

$\therefore a_1 = p+2 = 3$，

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 2n+1$，

$\therefore p=1$，$a_n = 2n+1$；

（II）由（I）知 $b_n = \dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}$

$\therefore T_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n=(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\ldots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$

$\because T_n>\frac{9}{10}$

$\therefore \frac{2n}{2n+1}>\frac{9}{10}$，解得$n>\frac{9}{2}$　又$\because n\in N_+$

$\therefore n=5$

题型二：分组求和法

例、

解：（1）因为a_n是首项为$a_1=19$，公差$d=-2$的等差数列，

所以$a_n=19-2(n-1)=-2n+21$，

$S_n=19n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=20n-n^2$．

（2）由题意$b_n-a_n=3^{n-1}$，所以$b_n=a_n+3^{n-1}$，$=21-2n+3^{n-1}$

$T_n=S_n+(1+3+3^2+\ldots+3^{n-1})$

$=-n^2+20n+\frac{3^n-1}{2}$．

题型三：错位相减求和法

例 1、解：

(1) $\because a_{n+1}=(1+\frac{1}{n})a_n+\frac{n+1}{2^n}$

$\therefore a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n+\frac{n+1}{2^n}$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{2^n}$

又$\because b_n=\frac{a_n}{n}$，$\therefore b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2^n}$，

累加法可得

$$(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+(b_4-b_3)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}$$

又由$a_1=1$，得$b_1=1$，$\therefore b_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

（2）由（1）知$a_n=2n-\frac{n}{2^{n-1}}$，设数列$\left\{\frac{n}{2^{n-1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，

则$T_n=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}$①

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$ ②

①－② 可得 $\frac{1}{2}T_n=1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$

$\therefore T_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{(2+2n)n}{2}-4+\frac{n+2}{2^{n-1}}=n^2+n-4+\frac{n+2}{2^{n-1}},n\in N^*$.

例 2、

解：（Ⅰ）数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n且$S_n=2n^2+n$，$n\in N^*$，

则：$a_n=S_n-S_{n-1}$（$n\geqslant 2$），

$=2n^2+n-2(n-1)^2-(n-1)$

$=4n-1$，

当$n=1$时，$a_1=3$符合通项公式，

所以：$a_n=4n-1$．

由于：数列$\{b_n\}$满足$a_n=4\log_2 b_n+3$，$n\in N^*$．

则：$4n-1=4\log_2 b_n+3$，

所以：$b_n=2^{n-1}$，

（Ⅱ）由（Ⅰ）得：设$c_n=a_nb_n=(4n-1)2^{n-1}$，

则：$T_n=c_1+c_2+\ldots+c_n=3\cdot 2^0+7\cdot 2^1+\ldots+(4n-1)2^{n-1}$①

$2T_n=3\cdot 2^1+7\cdot 2^2+\ldots+(4n-1)2^n$②

①－②得：$-T_n=4(2^0+2^1+\ldots+2^{n-1})-(4n-1)2^n-1$，

整理得：$T_n=(4n-5)2^n+5$．